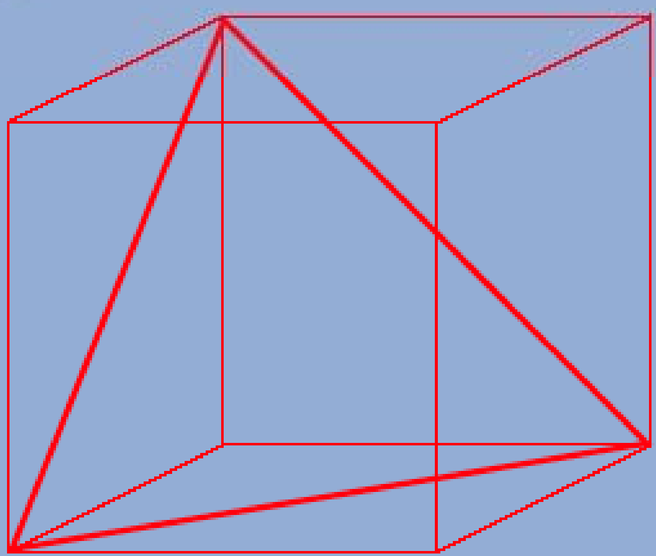
mathbu.ch

Mit Flächen bauen – mit Flächen lernen



Didaktisches Begleitmaterial zu den Formen

schulverlag

Klett

Dank

Unser herzlicher Dank für die wertvolle Unterstützung geht im Besonderen an:

- Die Schülerinnen und Schüler, die mit den Flächen arbeiteten
- Werner Jundt
- Gerhard Stettler
- Gregor Wieland
- Anna Sobiechkowska, Studentin PH Bern
- Michael Tanner, Student PH Bern

Impressum

1. Auflage 2008

schulverlag blmv AG

ISBN 978-3-292-00543-4
ISBN 978-3-292-00544-1
ISBN 978-3-292-00545-8
ISBN 978-3-292-00546-5

Klett und Balmer AG

ISBN 978-3-264-83893-0
ISBN 978-3-264-83894-7
ISBN 978-3-264-83895-4
ISBN 978-3-264-83896-1

mathbu.ch

Mit Flächen bauen – mit Flächen lernen

Didaktisches Begleitmaterial zu den Formen

Dieter Blum
Isabelle Blum-Keller
Ule Matter
Annegret Nydegger

schulverlag blmv AG, Bern
Klett und Balmer Verlag, Zug



Einführung
Vorwort

Die Hand ist das Werkzeug des Denkens (Karl Jaspers)

Liebe Kolleginnen und Kollegen
Kennen Sie diese Situation?
Beim Planen des Mathematikunterrichts sind wir uns bewusst:
Es wäre gut,

- wenn die Schülerinnen und Schüler die Pyramiden bauen würden.
- wenn die Schülerinnen und Schüler Figuren handelnd und nicht nur denkend drehen und spiegeln würden.
- wenn die Schülerinnen und Schüler verschiedene Prismen und Pyramiden miteinander vergleichen würden.
- wenn die Schülerinnen und Schüler Netze von Prismen und Pyramiden vergleichen würden.
- wenn ...

wenn die mathematischen Inhalte möglichst ganzheitlich, verschiedene Sinne ansprechend, aufgebaut würden.

Obschon wir uns der Wichtigkeit des handelnden Zugangs bewusst sind, müssen die Lernenden dennoch nur zeichnen und denken. Das nötige Material liegt nicht vor. Es bleibt bei Papieraufgaben, denn der Zeitaufwand ist gross in zweierlei Hinsicht:
Im Unterricht wird zu viel Zeit zur Herstellung der Materialien benötigt. Bevor sich die Schülerinnen und Schüler der Hauptaufgabe widmen können, geht zu viel Zeit verloren.
Materialien im Klassensatz bereitstellen, ist zu zeitaufwändig.

Das war die Ausgangslage, um das vorliegende Projekt zu starten: «Materialien zum handlungsgestützten Üben entwickeln».
Wir setzten uns das Ziel, Materialien zu entwickeln, welche die Organisation von handlungsgestützten Lernphasen vereinfachen.

Das Autorenteam

Inhaltsverzeichnis des didaktischen Begleitmaterials

Überblick Inhalt didaktisches Begleitmaterial

Grundlegendes (Seite 6 , Abschnitt Grundlegendes)
Eine kurze Einbettung des handlungsgestützten Übens in die aktuelle Didaktik: Handlungsgestütztes Üben wird vielen Anforderungen des Mathematikunterrichts gerecht. Diese Lernform eignet sich sowohl zur Kompetenzförderung wie auch zum Aufbau mathematischer Inhalte.

Beschreibung des Lernmaterials (Abschnitt Lernmaterial Seite 11)
Das Material wird vorgestellt und Einsatzmöglichkeiten werden aufgezeigt. Tipps zur Organisation in der Klasse und zum Ordnungssystem können helfen, die Verwendung des Materials zu optimieren.

Verknüpfungen mit dem mathbu.ch und dem Zahlenbuch (Abschnitt Lehrmittelbezug Seite 16)
Die Verbindungen mit dem mathbu.ch und dem Zahlenbuch sind in übersichtlichen Tabellen zusammengefasst. Sie zeigen, zu welchen Themen die Materialien im Unterricht eingesetzt werden können. Die Aufgaben zum Flächenmaterial sind gezielt so ausgerichtet, dass sie die Arbeit mit dem Lehrmittel unterstützen. Die vorliegenden Lernumgebungen sind so formuliert, dass sie entsprechende Lerninhalte aus dem Lehrmittel ergänzen.

Einsatzmöglichkeiten (Abschnitt Einsatzmöglichkeiten Seite 20 ff.)
Einerseits zeigen illustrierte Anwendungsbeispiele die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten des Materials auf. Andererseits werden ausformulierte Lernumgebungen, angelehnt an das mathbu.ch, angeboten.

Lernumgebungen (Ab Seite 26 Lernumgebungen zum Kopieren)
Vierzehn Themen sind zu Lernumgebungen ausformuliert und können als Arbeitsblätter den Schülerinnen und Schülern abgegeben werden. Jeder Lernumgebung sind ein didaktischer Kommentar und Lösungen angefügt.

Grundlegendes
Didaktische Ausrichtung

Die Lernumgebungen bauen auf dem Prinzip des handlungsgestützten Übens auf.

«handlungsgestütztes Üben»

handlungs...
Innere Bilder werden auf Grund von äusseren Bildern aufgebaut. Der hochkomplexe Vorgang der Wahrnehmung ist untrennbar mit Handlung und Sprache verknüpft. Zur Unterstützung des Lernprozesses müssen Möglichkeiten bestehen, Begriffe und Vorstellungen handelnd aufzubauen.

... gestütztes ...
Unterstützung bedeutet, die Lernenden nutzen die Handlung als Hilfsmittel. Wenn die Verinnerlichung vollzogen ist, verzichten sie auf den handelnden Teil. Bei Problemen können sie wieder auf die Handlung zurückgreifen, d.h. sich auf sie abstützen.

... Üben
Üben findet in jeder Lernphase statt und ist nicht vom Lernen zu trennen. Üben ist ein wiederholtes Anwenden von Wissenselementen oder Fertigkeiten.

So wichtig es ist, den handelnden Zugang immer wieder anzubieten, so ist es ebenso wichtig, dass die Lernenden immer wieder mit Aufgabenstellungen konfrontiert werden, die ihnen helfen, sich vom Material zu lösen. Der Verinnerlichungsprozess geschieht nicht zwingend von selbst. Blosses Hantieren mit Material garantiert noch keinen Aufbau des Vorstellungsvermögens. Der Übergang vom Konkreten zum Abstrakten ist eine Schlüsselstelle im Verstehensprozess. Er erfolgt individuell, wenn die Lernvoraussetzungen gegeben sind. Damit Verständnis stabil und dauerhaft aufgebaut werden kann, muss die Brücke vom Konkreten zum Abstrakten in beiden Richtungen begehbar sein. Wer den Zusammenhang verloren hat und nur noch abstrakte Hülsen im Kopf hat, muss die Gelegenheit haben, den Weg nochmals zu gehen.
Die Lernenden können so ihre Einsichten verifizieren und stärken.

Leitideen des Lehrwerks mathbu.ch handlungsgestützt umsetzen

Bei der Entwicklung dieses Lernmaterials stützen wir uns auf die Leitideen des Lehrwerks mathbu.ch.

Aktiv entdeckendes Lernen und operatives Durchdringen («Was geschieht, wenn ...?»)

Handelnde Zugänge ermöglichen aktiv entdeckendes Lernen. Objekte können untersucht und verändert werden. Veränderungen, zum Beispiel ein Vor und Zurück, ein Vorher und ein Nachher, können nachgespielt und so verifiziert werden.
Mit weiterführenden Fragestellungen wird in den vorliegenden Lernumgebungen bewusst das Verlassen der Handlungsebene provoziert. Dieses «Handeln im Kopf» knüpft an die vorausgehenden konkreten Handlungen an und ist dadurch gut gestützt.

Verschiedene Lernwege

Offene Aufgabenstellungen lassen einen grossen Handlungsspielraum zu. Die Lernenden werden tätig, lösen die Lernumgebungen und generieren neue Aufgaben. Dem Handlungsspielraum und somit auch der Vielfalt der verschiedenen Lernwege sind keine Grenzen gesetzt.

Natürliche Differenzierung

Lernschwächere sind dadurch gestützt, dass sie auf die Handlungsebene zurückgreifen können. Das Denken am Objekt lässt Handlungsweisen zu wie Messen, Zählen und Verändern. Diese ermöglichen den Aufbau wichtiger Grundvorstellungen und Grundeinsichten.
Lernstarke verlassen bei einfacheren Aufgaben das konkrete Handeln bald und führen Operationen gedanklich durch. In weiterführenden Aufgaben werden auch sie wieder zum Material greifen, um komplexere Fragestellungen zu bearbeiten.

Individuelles und dialogisches Lernen

Individuelles Lernen fällt leichter, wenn die Überlegungen am Material überprüft werden. Zu zweit lässt es sich leichter am Material diskutieren. Die Diskussion wird zum Beispiel gestützt durch das Aufzeigen des Vorgehens, durch das Vormachen eines Gedankenschrittes oder durch das Nachbauen unterschiedlicher Lösungen.

Reflexion und Erkenntnissicherung

Nachhaltiges Lernen bedingt eine Reflexion und Erkenntnissicherung. Dies geschieht bei Lernenden im Volksschulalter nicht von selbst. Die Reflexion muss bewusst initiiert werden. In den vorliegenden Lernumgebungen werden Aufgaben angefügt, die vom Material wegführen.

Die handelnd erarbeiteten Erkenntnisse sollen zusammenfassend nochmals gedanklich repetiert werden. So können zum Beispiel bewusst Unklarheiten aufgedeckt werden. In dem Fall können die Lernenden auf das Material zurückgreifen. Sie können am Material zeigen, zeichnen, erklären, begründen und so die Situation klären. Dieses Zurück zum Material ist ein wichtiger Prozess, der die Reflexion und die Erkenntnissicherung unterstützt, ja vereinfacht.

Mathematische Kompetenzen handlungsgestützt fördern

Die aktuellen Lehrpläne fordern einhellig, dass im Mathematikunterricht sowohl mathematische Inhalte erschlossen wie auch Kompetenzen gefördert werden müssen.

Aufgabenbeispiel

a) Baut mit den vorliegenden Flächen verschiedene Körper.

b) Zeichnet dazu die Schrägbilder.

c) Berechnet die Körper (Kantenlänge, Oberfläche, Volumen).

d) Sagt voraus, mit welchen Flächen sich Quader, Prismen oder Pyramiden bauen lassen. Begründet eure Vorhersagen.

Verschiedene Körper bauen

Am Aufgabenbeispiel links zeigen wir, dass sich handlungsgestütztes Üben eignet, dem Anspruch einer breiten Kompetenzförderung gerecht zu werden.

Verschiedene Kompetenzaspekte (nach HarmoS)

Erforschen und explorieren

Die Lernenden erforschen und testen, mit welchen Flächen Körper gebaut werden können. Dabei entdecken sie Eigenschaften verschiedener Körper. Bsp. Der Mantel einer Pyramide muss aus Dreiecksflächen gebaut sein.

Mathematisieren und modellieren

Um die Vorstellung von Körpern zu erweitern, müssen Eigenschaften und Strukturen derselben erkannt und verinnerlicht werden. Das geschieht im Fall dieser Aufgabe, indem bereits durch das Bauen und dann durch das Untersuchen des Körpers Eigenschaften erkannt werden. Das Beschreiben, wie ein Körper gebaut wird, und das Zeichnen des Körpers sind weitere Abstraktionsschritte.

Wissen, erkennen und beschreiben

Die gebauten Körper und Teile davon müssen als solche erkannt und benannt werden.

Operieren und berechnen

Kantenlänge, Oberfläche und Volumen werden berechnet.

Darstellen und formulieren

Die gebauten Objekte werden im Schrägbild gezeichnet. Dadurch leisten die Lernenden eine Übersetzung vom Raum in die Ebene und umgekehrt.

Instrumente und Werkzeuge verwenden

Messinstrumente und Taschenrechner werden sinnvoll eingesetzt.

Argumentieren und begründen/Interpretieren und reflektieren

Am Objekt begründen und erklären fällt leichter. Die Argumente können oft an den Modellen überprüft werden. Das vorliegende Material kann als Gedankenstütze in der Reflexionsphase eingesetzt werden.

Mathematische Inhalte handlungsgestützt aufbauen

Eine Übersicht möglicher mathematischer Inhalte, die mit dem Lernmaterial aufgebaut, vertieft oder repetiert werden können. (Konkrete Anwendungsbeispiele als Lernumgebungen ab Seite 26)

Stichworte zu mathematischen Inhalten

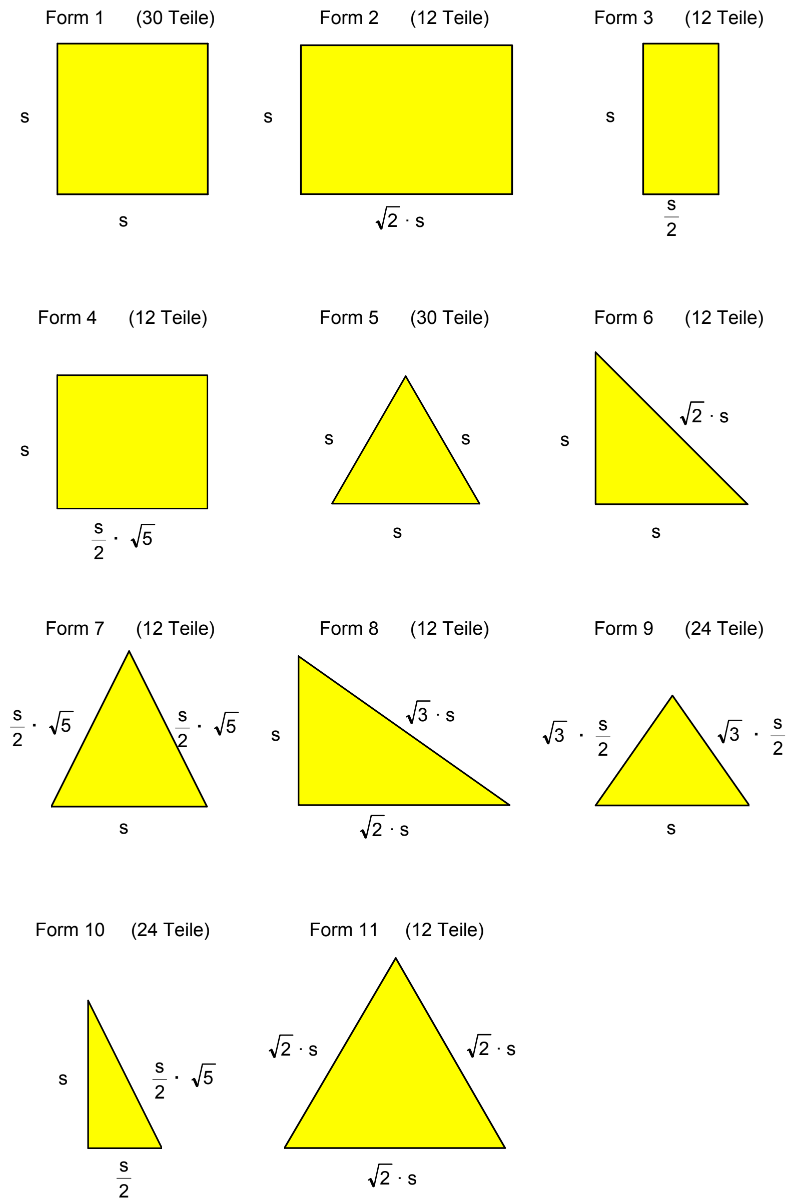
Messen	Flächeninhalt mit Zentimeterraster messen, Volumen von Körpern durch Umschütten messen...
Eigenschaften von Flächen untersuchen	Formen drehen, fühlen, übereinanderlegen, Parallelen erkennen, Winkel untersuchen...
Flächen berechnen Umfang und Flächeninhalt	Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Dreieck, Trapez...
Flächen teilen – Flächen zusammensetzen	Bruchteile von Flächen, zusammengesetzte Flächen...
Linien und Winkel in Figuren	Wechselwinkel, Stufenwinkel, Winkel in Parketten...
Körper berechnen Kantenlänge, Oberfläche und Volumen	Quader, Prisma, Pyramide
Körper teilen – Körper zusammensetzen	Teilkörper des Würfels bauen: zwei Prismen – ein Würfel, drei Prismen – ein Würfel, drei Pyramiden – ein Würfel, sechs Pyramiden – ein Würfel ...
Schnittflächen in Körpern	Schnittfläche in Würfel, Quader, Prisma, Pyramide...
Körper darstellen	Schrägbild, Grund-, Auf- und Seitenriss...
Linien und Winkel in Körpern	Raumdiagonale Winkel in Prismen und Pyramiden...
Pythagoras	Strecken in Körpern berechnen mit Hilfe des Satzes von Pythagoras
Ähnlichkeit	Ähnliche Flächen, ähnliche Körper
Kongruenzabbildungen	Flächen im Koordinatensystem spiegeln, drehen, schieben, Achsen- oder punktsymmetrische Figuren bauen...
Platonische und archimedische Körper	Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Kuboktaeder...

Lernmaterial

Das Lernmaterial besteht aus Flächenformen (Flächenset) und einer Begleit-CD.

Flächenmasse

Ein Set besteht aus 11 verschiedenen Formen, insgesamt 192 Teilen. Die Formen sind so gewählt, dass sehr viele Kombinationen möglich sind. Es lassen sich verschiedene Flächen und verschiedene Körper bauen.
s = 10 cm (Abbildung als Kopiervorlage vorhanden)

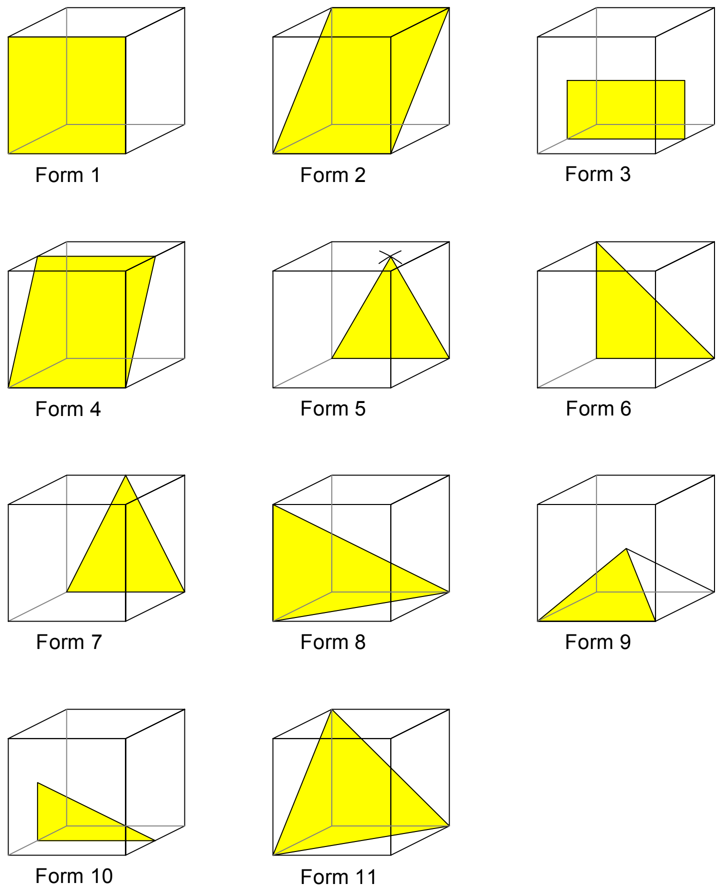


Die Flächensets können in vier verschiedenen Farben bezogen werden.
transparent weiss
transparent gelb
transparent blau
transparent grün

Bezugsgrösse Dezimeterwürfel

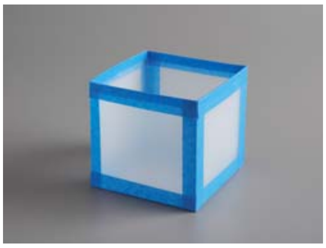
Die Formen und die Masse sind so gewählt, dass viele Kombinationen möglich sind. Die Lernenden können sich so immer wieder mit den Grössen 10 cm, 100 cm^2 und 1000 cm^3 = 1 dm^3 = 1 l beschäftigen. Dies sind wichtige Referenzgrössen zur Abschätzung von Alltagssituationen.
Die Dicke der Flächen misst 0.8 mm. Ein Stapel von 25 Flächen ist gleich hoch wie ein Würfel mit 2 cm Kantenlänge. Die Würfel in dieser Grösse gibt es im Würfelkoffer von Ingold, Herzogenbuchsee. Kubikzentimeterwürfel können im Schubi-Verlag, Schaffhausen, bezogen werden. Somit wäre auch eine Kombination verschiedener Lernmaterialien möglich.

Alle Formen haben einen besonderen Bezug zum Dezimeterwürfel.
Hier sind die Schrägbilder von Dezimeterwürfeln gezeichnet, in welche die Flächen hineingestellt wurden.
(Abbildung als Kopiervorlage vorhanden.)



Materialbeschaffenheit

Die Formen sind sehr beständig. Ihre Oberfläche ist kratzfest und schmutzabweisend. Die Formen können mit Filzstift oder Bleistift beschriftet und mit Brennsprit beziehungsweise mit Radiergummi gereinigt werden.



Klebstreifen als Bindeglied

Die Formen werden mit gewöhnlichen Klebstreifen zusammengefügt. Auf diese Weise lassen sich leicht verschiedene Flächen und Körper herstellen. Ebenso leicht lassen sich die Objekte wieder in die ursprünglichen Bestandteile zerlegen und versorgen.
Die meisten Klebstreifen sind gut geeignet, auch Abdeckband. Dieses gibt es auch farbig. Allfällige Kleberückstände lassen sich leicht mit Brennsprit entfernen.

Detaillierte Materialbeschreibung

Die Formen sind aus Polypropylen, einem sehr umweltverträglichen Material. Sie sind weichmacherfrei und zu 100 % recycelbar. Durch ihre Feinsand-/Sandoberfläche sind sie besonders resistent gegenüber äusseren Einflüssen. Polypropylen ist beständig gegenüber Alkoholen, organischen Lösungsmitteln und Fetten. Es ist nicht beständig gegenüber Benzin. Im Gegensatz zu anderen Kunststofffolien, zum Beispiel PVC, bleibt die Steifigkeit auch bei höheren Temperaturen erhalten.

Einsatz im Unterricht

Flächenset

Empfehlung

Die Flächensets können vielfältig eingesetzt werden.
Wir schlagen vor, dass mit einem Set eine Gruppe von 4 bis 6 Schülerinnen und Schülern arbeitet. So haben die Lernenden eine genügend grosse Anzahl Formen zur Verfügung. Je nach Klassengrösse werden so pro Klasse 2 bis 4 Schachteln gebraucht. Die Gruppe ist für das Material verantwortlich. Nach der Arbeit kann mit einem Blick festgestellt werden, ob die Schalen richtig eingeräumt und vollständig sind.

Unterschiedlich farbige Formen bezeichnen Bruchteile eines Quadrates.

Vier verschiedene Farben

Die Flächensets gibt's in vier verschiedenen Farben:
transparent weiss, transparent gelb, transparent blau, transparent grün.
Wir empfehlen, im Klassenverband verschiedenfarbige Flächensets einzusetzen.
Das erleichtert einerseits das Aufräumen nach der Arbeit. Die Zuordnung in die Schalen wird durch die Farbe bestimmt. Wenn Formen untereinander ausgetauscht wurden, werden die Schalen auf diese Weise wieder gleichmässig gefüllt.
Andererseits können die farbigen Flächen als Gestaltungselement genutzt werden:
Zum Beispiel: Grund- und Deckfläche haben nicht die gleiche Farbe wie die Mantelfläche, Parkette mit unterschiedlichen Farben....

Der UTZ-Koffer kommt in vielen Schulen als Ordnungssystem zum Einsatz.

Ordnungssystem

Die Schalen passen präzis in das bei Lehrpersonen beliebte Ordnungssystem UTZ Rako.
Die Rako- oder UTZ-Koffer können in jedem Handwerkermarkt in verschiedenen Farben gekauft werden. Sie sind sehr solide. Die gängigen Schulschränke sind auf diese Masse konzipiert, somit ist ein einfaches, ordentliches Aufbewahren leicht möglich.
Die Grösse der Schalen ist so gewählt, dass für 1, 2 und 4 Sets Normgrössen der UTZ-Koffer passen.

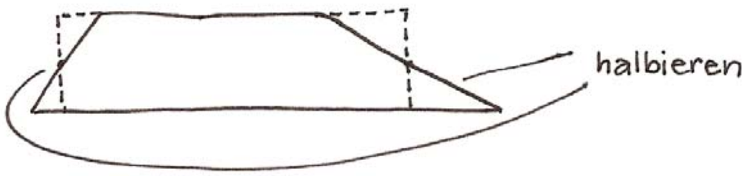
Aufbau der Lernumgebungen

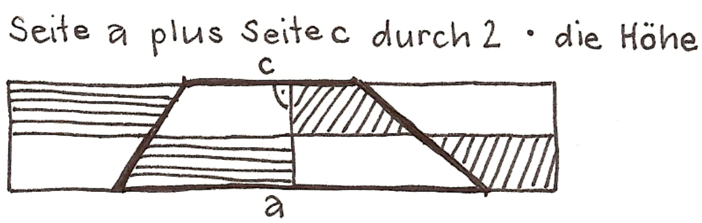
Die Aufgaben bieten einfache und anspruchsvollere Problemstellungen, eine natürliche Differenzierung ist angelegt.
Die Lernenden werden beim Bearbeiten der Lernumgebungen von handelnden Phasen über das Beschreiben und Zeichnen in abstrakte und reflektierende Phasen geführt.

Die Aufgaben am Ende einer Lernumgebung führen vom Material weg zu allgemeinen Feststellungen. Sie lassen sich zu Erkenntnissicherungen verdichten.
Bewusst werden keine formulierten Erkenntnissicherungen (Theorie) vorgegeben. Die Schülerinnen und Schüler sollen einzeln, in Gruppen und in der Klassendiskussion eigene Formulierungen entwickeln und diskutieren.

Schülerbeispiele

Erkläre und beschreibe, wie du den Flächeninhalt eines Trapezes bestimmst.





Erkenntnissicherungen von Schülerinnen und Schülern können diskutiert und verglichen werden.

- Welche der Formulierungen ist präzis?
- Wann verstehe ich etwas gut, wann nicht?
- Was macht eine Aussage verständlich, wann bleibt sie unklar?
- Wie können Erkenntnisse gestaltet werden?
- ......

Lehrmittelbezug
Verknüpfung zum Schweizer Zahlenbuch

	CH-Zahlenbuch 5*	Material	Inhalt	Ideenskizzen/Aufgaben
S. 10	Ornamente	Verschiedene Formen	Geometrische Formen wahrnehmen	Ornamente legen
S. 20	Figuren und Flächen	Verschiedene Formen	Aufbau des Flächen- und Bruchverständnisses	Flächen- und Bruchteile bestimmen
S. 42	Bruchteile erkennen und darstellen	Verschiedene Formen	Vorstellung zu Bruchteilen aufbauen	Zusammengesetzte Flächen legen und Teilflächen als Bruchteile bestimmen
S. 52	Proportionalität 1	Verschiedene Formen	Proportionalität anwenden	Mit verschiedenen Formen Figuren legen und diese vergrössert oder verkleinert zeichnen
S. 68	Künstler konstruieren	Verschiedene Formen	Vorstellung zum Massstab aufbauen	Mit verschiedenen Formen in verschiedenen Farben einfache Kunstwerke legen und in verschiedenen Massstäben abzeichnen

* Überarbeitete Fassung

	CH-Zahlenbuch 6**	Material	Inhalt	Ideenskizzen/Aufgaben
S. 4	Ornamente	Verschiedene Formen	Muster und Symmetrien erkennen	Symmetrische und unsymmetrische Muster legen Muster erfinden
S. 12	Geobrett	Verschiedene Formen	Erweiterung des Symmetrieverständnisses	Symmetrische Figuren legen Durch Umlegen einer Teilfläche die Symmetrieeigenschaften ändern
S. 22	Flächen	Verschiedene Formen	Flächeninhalt bestimmen	Zusammengesetzte Flächen legen Flächeninhalt und Umfang berechnen
S. 24	Ballspiele	Verschiedene Formen	Flächeninhalt und Umfang bestimmen	Verschiedene Flächen legen Flächeninhalt und Umfang berechnen.
S. 38	Wandern	Rechtwinklige Dreiecke	Distanzen auf der Landkarte und in Wirklichkeit ermitteln	Zusammenhang zwischen Streckenlängen auf Karten und Streckenlängen in Wirklichkeit untersuchen Zusammenhang zwischen Steigung und wahrer Länge einer Strecke untersuchen
S. 46	Winkelmessung	Verschiedene Formen	Winkelverständnis aufbauen	An verschiedenen Flächen (auch an zusammengesetzten) Grössen von Winkeln schätzen und messen. Gesetzmässigkeiten herausfinden Innenwinkelsummen bei Vielecken bestimmen
S. 72	Rauminhalte (Volumen)	Verschiedene Formen	Rauminhalte und Oberflächen bestimmen	Verschiedene Körper bauen (auch zusammengesetzte) Netze legen und verändern Kantensummen, Oberflächen und Rauminhalte schätzen und berechnen

** Noch nicht überarbeitete Fassung

Verknüpfung zum mathbu.ch

	mathbu.ch 7/7+	Material	Inhalt	Ideenskizzen/Aufgaben
LU 1	So klein! − So gross!	Quadratformen Rasterpapier	Förderung der Vorstellung zu Längen-, Flächen- und Raummass	Quadratzentimeter in Quadratdezimeterfläche schätzen, zählen, berechnen ¾ dm^2 = ? cm^2 Bruch/Prozentrechnen
LU 4	Fünfer und Zehner	Stapel von Flächen	Proportionale Beziehungen	Wie hoch ist ein Stapel von zehn Formen? Aus wie vielen Formen besteht ein Stapel von 8 cm Höhe?
LU 8	Parallelogramme untersuchen	Verschiedene Formen	Unterschied Fläche – Umfang Flächenzerlegung	Verschiedene Vielecke bauen und ihre Eigenschaften untersuchen
LU 9	Dreiecke als Bausteine	Verschiedene Formen	Unterschied Fläche – Umfang Flächenzerlegung Höhen in Dreiecken	Verschiedene Vielecke bauen Umfang und Fläche berechnen Höhen in Dreieckflächen einzeichnen
LU 12	Verpackungen	Verschiedene Formen	Vorstellung aufbauen zu Längen-, Flächen- und Raummass	Verschiedene Quader und Tetraeder bauen Aus vorgegebenen Netzen Volumen und Oberfläche berechnen
LU 13	Kopfgeometrie	Quadratformen	Würfelabwicklungen	Netze legen und verändern
LU 14	Mit Würfeln Quader bauen	Rechteck- und Quadratformen	Quaderabwicklungen	Verschiedene Quader bauen Netze verändern, ergänzen
LU 20	Gebrochene Zahlen unterschiedlich darstellen	Quadratform Weitere Formen	Vorstellung zu Bruchteilen aufbauen	Flächen übereinanderlegen: Bruchteile und Prozentanteile von Flächen bestimmen
LU 21	Prozente	Verschiedene Formen	Bruchteile und Prozente	Flaggen oder Muster mit vorhandenen Formen legen Flächenanteile berechnen
LU 25	Schmetterling und Propeller	Alle Formen	Symmetrieverständnis aufbauen	Achsen- und/oder punktsymmetrische Figuren legen und untersuchen
LU 26	America's Cup	Alle Formen	Vorstellung von Winkeln aufbauen	Vielecke legen, Winkel bestimmen
LU 27	Schieben – Drehen – Zerren	Alle Formen	Kongruenzabbildungen	Muster legen, Kongruenzabbildungen suchen
LU 30	Bruchbilder	Rechteck- und Quadratformen	Brüche multiplizieren	Flächen übereinanderlegen, Bruchteile bestimmen Brüche multiplizieren
LU 32	Mit Zahlen Punkte festlegen	Alle Formen	Punkte im Koordinatensystem	Formen ins Koordinatensystem legen, spiegeln, Koordinaten bestimmen
LU 34	Strandbad	Quadratformen	Vorstellung zu Hohlmassen	Literwürfel zur Veranschaulichung: Liter − dm^3

	mathbu.ch 8/8+	Material	Inhalt	Ideenskizzen/Aufgaben
LU 5	Kopfgeometrie	Verschiedene Formen	Körper und Netze	Tetraeder bauen
LU 6	Entwicklung von zwei bis acht	Verschiedene Formen	Trapezfläche	Trapez bauen und berechnen Winkel untersuchen
LU 13	Satz des Pythagoras	Verschiedene Formen	Pythagoras anwenden	Seitenlängen, Flächen- und Raumdiagonalen mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen
LU 14	Wurzeln	Verschiedene Formen	Wurzelzahlen geometrisch darstellen	Bei welchen Formen sind die Seitenlängen Wurzelzahlen, z.B. $\sqrt{2}$?
LU 17	Schattenbilder und Schrägbilder	Quadratform	Vorstellung zum Kantenmodell fördern	Würfel mit farbigen Kanten betrachten und Schrägbilder zeichnen
LU 18	Hat das Dreieck eine Mitte?	Verschiedene Formen	Schwerlinien und Schwerpunkte	Verschiedene Flächen in Balance auf Bleistiftspitze halten, Schwerpunkt experimentell suchen Verschiedene Flächen in Balance auf Lineal halten, Schwerlinien experimentell suchen
LU 23	Grundfläche mal Höhe	Verschiedene Formen	Oberfläche und Volumen von geraden und schiefen Quadern und Prismen	Körper in Würfel stellen Anteil des Würfelvolumens berechnen Cavalieriprinzip experimentell zeigen
LU 25	Aufwärts − abwärts	Dreiecke	Steigungen berechnen	Anhand der Dreiecke (Keile) verschiedene Steigungen berechnen
LU 26	Dichte	Verschiedene Formen	Dichte	Dichte des Materials bestimmen

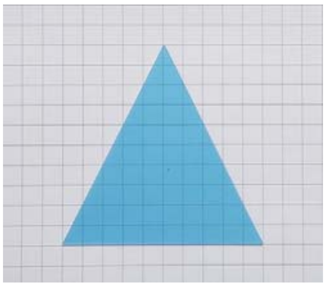
	mathbu.ch 9	Material	Inhalt	Ideenskizzen/Aufgaben
LU 5	Form	Verschiedene Formen Holzwürfelchen	Seitenverhältnisse Ähnlichkeit	Welche Rechtecke sind ähnlich zu einem A4-Blatt? Sind gleichseitige Dreiecke ähnlich?
LU 6	Pyramide und Pris-ma	Verschiedene Formen	Abwicklung Unterschied Höhe des Manteldreiecks und Höhe der Pyramide	Prismen, Pyramiden und Pyrami-dengerüste können mit den Formen gebaut werden Körper in Würfeln können nachge-baut werden
LU 7	Von eckig zu rund	Verschiedene Formen	Platonische Körper ohne Oktaeder	Würfel mit sechs Pyramiden bauen Tetraeder bauen
LU 8	Kopfgeometrie	Verschiedene Formen	Teilkörper des Würfels	Pyramide als 1/6 resp. 1/3 des Würfels bauen
LU 17	Körperschule	Verschiedene Formen	Teilkörper des Würfels	Welche Teilkörper des Würfels lassen sich mit den Formen legen?
LU 29	Formate	Rechtecke	Ähnlichkeit erkennen	DIN-Format mit Rechteckformen vergleichen

	mathbu.ch 9+	Material	Inhalt	Ideenskizzen/Aufgaben
LU 5	Form	Verschiedene Formen	Ähnlichkeit erkennen Ähnliche Figuren erzeu-gen	Bestehende Flächen und mögliche Körper auf Ähnlichkeit untersuchen Figuren im Massstab zeichnen
LU 6	Pyramiden	Verschiedene Formen	Eigenschaften von Pyra-miden und Prismen	Gerade und schiefe Pyramiden bauen und klassifizieren Pyramidennetze herstellen Höhe des Manteldreiecks und Höhe der Pyramide berechnen
LU 7	Kopfgeometrie	Verschiedene Formen	Körper, Restkörper und ihre Abwicklungen unter-suchen Projektionen von Körpern	Würfel in ein dimensionales Koordi-natensystem stellen Würfel und Tetraeder kippen Würfelansichten
LU 19	Körperschule	Verschiedene Formen	Teilkörper des Würfels	Welche Teilkörper des Würfels lassen sich mit den Formen bauen?
LU 24	Grösse – Lage – Form	Ausgewählte Formen	Kongruenzabbildungen im Koordinatensystem	Dreieck mit Höhe 10 cm und andere Formen auf Rasterpapier legen, schieben, spiegeln, drehen Abbildungsvorschriften anwenden
LU 27	Formate	Rechteckform	Ähnlichkeit erkennen	DIN-Format mit Rechteckformen vergleichen
LU 34	3 + 4 = 2 ?	Ausgewählte Formen	Gesetzmässigkeiten einer Gruppe	Als Hilfsmittel zur Rotation können Rechtecke, gebaute Rhomben und Dreiecke gewählt werden (Flächen mit unterschiedlichen Symmetrie-achsen)

Einsatzmöglichkeiten im Unterricht

Verschiedene Anwendungsmöglichkeiten werden mit einer Foto und einer kurzen Fragestellung vorgestellt.
Die kurz skizzierten Frage- oder Aufgabenstellungen können zu umfassenden Lernumgebungen ausgebaut werden oder sie lassen sich als Kurzaufgaben in kleinen Repetitionsphasen (z.B. als Lektionseinstieg) einsetzen. Zu einigen Beispielen liegen Lernumgebungen ausformuliert als Schülermaterial vor.

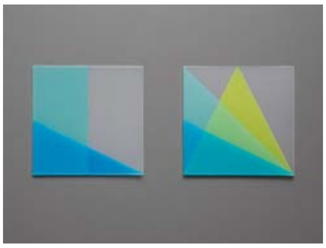
Denkanstösse zu Aufgaben im Bereich Flächen untersuchen



Flächenbestimmung mit Hilfe des Zentimeterrasters

Formen auf den Raster legen

Wie viele Zentimeterquadrate belegt die blaue Fläche?

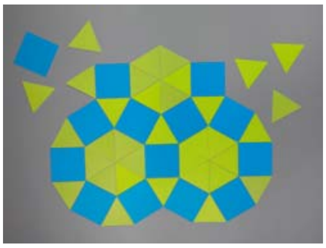


Flächenbruchteile durch Übereinander-legen

Formen übereinanderlegen

Welcher Bruchteil der Fläche ist dreifach belegt?

(Lernumgebung «Flächenanteile vergleichen»)

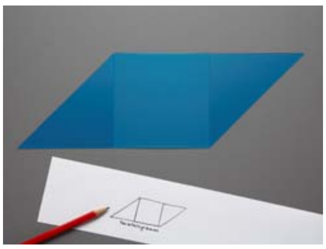


Parkett mit Formen unterschiedlicher Farbe

Parkette legen

Suche schöne Parkettmuster.

(Lernumgebung «Parkette»)

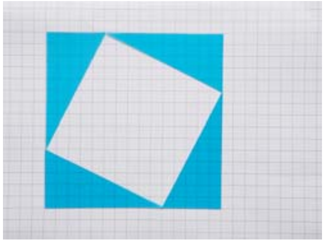


Schülerskizze und gelegte Figur

Flächen legen

Setze Teile zu bekannten Flächen zusammen.
Zeichne und beschreibe.

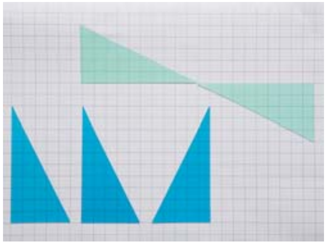
(Lernumgebungen «Parallelogramme», «Dreiecke – Vielecke», «Trapeze»)


Quadrat im Quadrat auf Zentimeter-raster

Pythagoras

Wie gross ist die eingeschlossene Fläche?

(Lernumgebung «Satz des Pythagoras»)

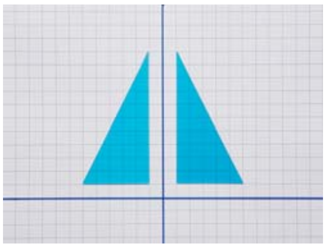

Aus Formen gelegte Figur mit Symmetrien

Kongruenzabbildungen

Welche Abbildung ist dargestellt?

Zeichne die Situation auf Häuschenpapier und zeichne den Spiegelpunkt oder die Spiegelachse ein.

Lege Situationen, die durch Achsenspiegelung, Parallelverschiebung, Punktspiegelung oder Drehung erzeugt werden.


Verschiebungen der Formen im Koordinatensystem mit Gleichungen beschreiben

Kongruenzabbildungen im Koordinatensystem

Bei einer Achsenspiegelung an der y - Achse wird

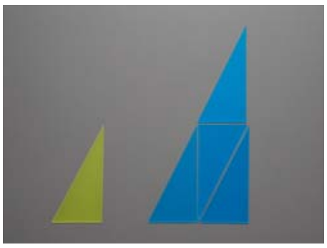
A (1, 1) zu A’ (-1, 1)

B (6, 1) zu B’ (-6, 1)

C (1, 11) zu B’ (-1, 11)

x’ = –x; y’ = y

Untersuche andere Kongruenzabbildungen und beschreibe die Abbildungsvorschrift.


Zwei ähnliche Figuren, gelegt mit Formen

Ähnliche Flächen legen

Nimm eine beliebige Form. Suche dazu ähnliche Flächen. Skizziere und begründe.

(Lernumgebung «Ähnlichkeit»)

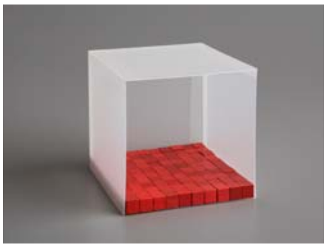
Denkanstösse zu Aufgaben
im Bereich Volumen untersuchen

Flächen zu Körpern stapeln

Volumen und Gewicht des Würfels

Staple einige Quadrate aufeinander. Wie viele Quadrate würdest du brauchen, um einen Würfel zu stapeln?

Wie schwer ist dieser? Würde er im Wasser schwimmen? Begründe.



Würfel mit Würfelchen füllen

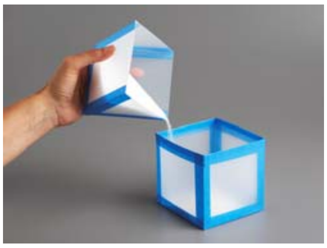
Würfel füllen, Volumen bestimmen

Baue mit den Formen eine Würfelhülle. Wie viele Kubikzentimeterwürfelchen braucht es, um den Boden zu bedecken?

Wie viele Würfel von 2 cm Kantenlänge braucht es, um den Würfel zu füllen?

Wie viele Würfel von 5 cm Kantenlänge braucht es, um den Würfel zu füllen?

(Lernumgebung «Berechnungen am Quader»)

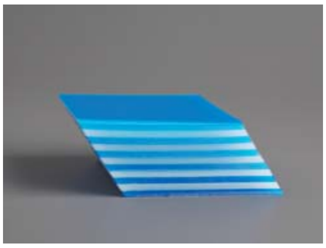


Körpervolumen durch Umgiessen bestimmen

Volumen von Prismen und Pyramiden

Baue ein Prisma und lass eine Seite weg. Fülle das Gefäss mit Sand oder Wasser. Miss den Inhalt mit einem Messbecher. Vergleiche mit dem Volumen eines Würfels.

Löse die gleiche Aufgabe mit anderen Körpern.



Mit gestapelten Formen schiefe und gerade Prismen bauen

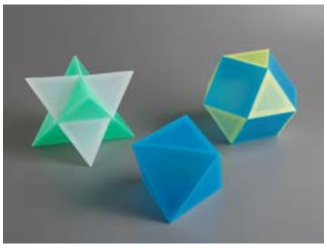
Schiefes Prisma und gerades Prisma vergleichen

Baue ein Prisma, indem du Flächen aufeinanderstapelst.

Verändere den Stapel so, dass daraus ein schiefes Prisma entsteht.

Beschreibe, wie das Volumen des geraden und des schiefen Prismas berechnet wird. Begründe.

**Denkanstösse zu Aufgaben
im Bereich Prismen und Pyramiden**

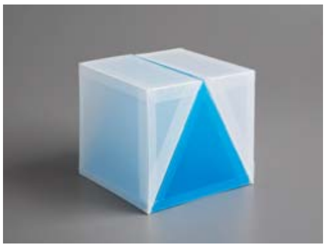

Eine Vielfalt von Körpern, die aus den Formen gebaut sind

Verschiedene Körper bauen

Baut mit den Formen möglichst viele unterschiedliche Körper.

Sortiert sie nach der Form Prisma oder Pyramide.

Ordnet sie der Grösse nach; derjenige Körper mit dem grössten Volumen zuerst.


Teilkörper des Würfels

Würfel aus Teilkörpern: Prismen

Baue die Teilkörper und vergleiche sie.


Drei Pyramiden ergeben einen Würfel

Würfel aus Teilkörpern, 1/3 Pyramide

Der Würfel ist aus drei Pyramiden zusammengesetzt.

Baue diese nach. Berechne die Oberfläche einer Pyramide.

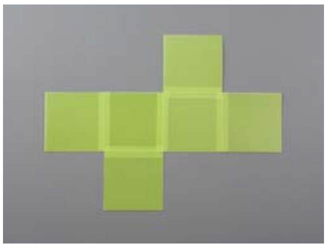

Pyramiden als Teilkörper des Würfels

Pyramiden vergleichen

Die grosse Pyramide ist 1/3 des Würfels. Die kleine Pyramide füllt 1/6 des Würfels.

Baue beide Pyramiden, vergleiche Oberfläche und Volumen der beiden.

**Denkanstösse zu Aufgaben
im Bereich Mantel und Netze**

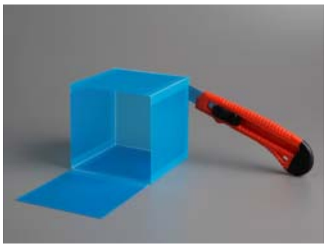


Würfelnetz

Netze legen

Lege verschiedene Würfelnetze und skizziere sie.
Färbe gegenüberliegende Seiten in deiner Skizze mit der gleichen Farbe.

(Lernumgebung «Vom Netz zum Würfel»)

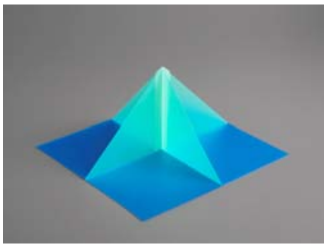


Körper aufschneiden

Netze aus Körpern schneiden

Schneidet die Kanten eines gebauten Körpers so auf, dass die Körperhülle in ein Netz zerfällt. Zeichnet den Körper im Schrägbild und das entstandene Netz.

(Lernumgebung «Vom Körper zum Netz»)



Pyramidengerüst mit Grundfläche

Pyramidengerüst

Baue das «Pyramidengerüst» nach. Stelle aus Papier den Mantel dieser Pyramide her.

(Lernumgebungen «Pyramiden bauen», «Prisma und Pyramide»)

Pyramidenmantel aus Dreieckformen

Pyramidenmantel

Stelle verschiedene Mantelflächen so her, dass die Grundfläche ein Dreieck, ein Quadrat, ein Rechteck, ein Trapez, ein Fünfeck, ein Sechseck... ist.

**Denkanstösse zu Aufgaben im
Bereich Schnitte und besondere Körper**

Fläche im Würfel

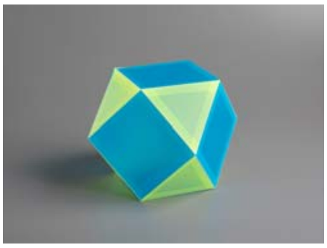
Rechteckige Schnittflächen

Bestimme die Fläche. Zeichne sie im Massstab 1 : 2.

Schnittlinien im Würfel markieren die Schnittfläche

Dreieckige Schnittfläche

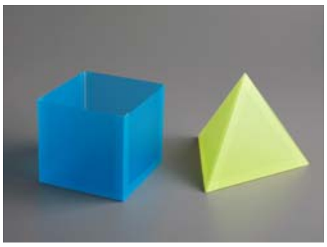
Stelle die Fläche mit festem Papier her, die in den Würfel links passt.
Überprüfe, indem du sie in den Würfel stellst. Bestimme ihre Fläche.



Kuboktaeder

Kuboktaeder

Baue diesen Körper.
Stell dir den Würfel vor, in den du diesen Kuboktaeder stellen kannst. Wie gross muss der kleinstmögliche sein? Stelle ihn mit Papier her und überprüfe mit dem Modell.
Berechne das Restvolumen.



Tetraeder Im Würfel

Tetraeder im Würfel

Baue einen Tetraeder so, dass er in einem Dezimeterwürfel Platz hat.
Stelle ihn in den Würfel. Skizziere das Schrägbild.
Baue die Restkörper.
Gib von allen Teilkörpern das Volumen und die Oberfläche an.

Lernumgebungen Überblick

Die Lernumgebungen sollen konkret aufzeigen, wie Unterrichtsaufträge, gestützt auf das vorliegende Material, lauten könnten.
Die Aufgaben sind so ausformuliert, dass sie als Unterlagen für die Schülerinnen und Schüler eingesetzt werden können.
Sie eignen sich zum Beispiel zur Repetition. Inhalte der vorangehenden Schuljahre können so in ganzheitlicher Weise wiederholt und vertieft werden.
Die Aufgaben sind umfassend und zum Teil auch zeitaufwändig.

Die Lernumgebungen sind exemplarisch und repräsentieren nicht alle geometrischen Inhalte der Schuljahre.

Die folgenden Themen liegen als Lernumgebung vor:

· Flächenanteile vergleichen	ab 7. Schuljahr
· Parallelogramme	ab 7. Schuljahr
· Trapeze	ab 8. Schuljahr
· Dreiecke und Vielecke	ab 7. Schuljahr
· Parkette	ab 7. Schuljahr
· Vom Netz zum Würfel	ab 7. Schuljahr
· Vom Körper zum Netz	ab 7. Schuljahr
· Berechnungen am Quader	ab 7. Schuljahr
· Satz des Pythagoras	ab 8. Schuljahr
· Würfelschnitte	ab 9. Schuljahr
· Flächen im Würfel	ab 9. Schuljahr
· Pyramiden bauen	ab 9. Schuljahr
· Ähnlichkeit	ab 9. Schuljahr
· Prisma und Pyramide	ab 9. Schuljahr

Lernumgebung «Flächenanteile vergleichen»

Material
Quadrat 1, Rechteck 3
Dreiecke 6, 7, 10
Kärtchen, Schere

Flächen kann man übereinanderlegen und erhält dadurch verschiedene Teilflächen. Diese Teilflächen werden miteinander verglichen.

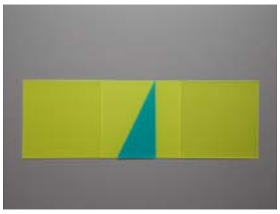
Aus zwei Flächen gelegte Figur

1 Flächen über Quadrat legen und Bruchteile bestimmen

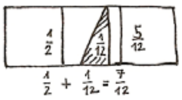
A Lege auf die Quadratform 1 eine der Formen 3, 6, 7 oder 10. Zeichne das Quadrat mit den Teilflächen.

B Benenne Teilflächen.

C Gib die Teilflächen als Bruchteile des Quadrates an.



Dreieckform im Innern des Rechtecks



Beispiel zu Aufgabe 2 D

2 Flächen über Rechteck legen und Bruchteile bestimmen

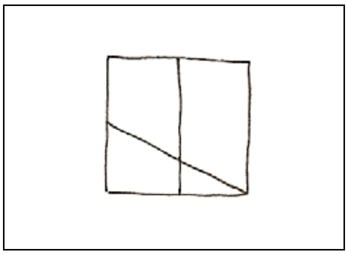
A Bilde aus drei Quadratflächen ein Rechteck. Lege eine der Formen 1, 3, 6, 7 oder 10 auf die Rechteckfläche und zeichne die Figur.

B Welchen Bruchteil des Rechtecks haben die Teilflächen?

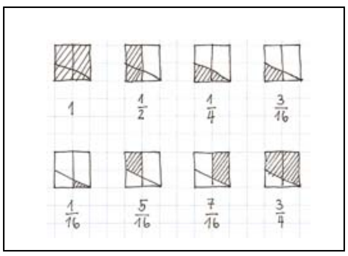
C Schiebe die aufgelegte Form an den linken Rand, an den rechten Rand oder an eine andere Stelle im Rechteck. Zeichne die Figuren und gib die Bruchteile der Teilflächen an.

D Schreibe Rechnungen zu den Figuren. Links siehst du ein Beispiel.

E Löse die Aufgabe 2 A - D für vier, fünf, … Quadratformen.



Vorderseite des Kärtchens



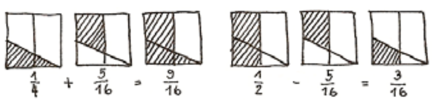
Rückseite des Kärtchens

3 Mehrere Flächen übereinanderlegen und Bruchteile bestimmen

Lege auf die Quadratform zwei oder mehrere der Formen 3, 6, 7 und 10. Ein Beispiel siehst du links.

A Zeichne zur gelegten Figur eine Kärtchenaufgabe wie links abgebildet.

B Gib wie im Beispiel links die Anteile der schraffierten Flächen in Bezug zur Quadratfläche an.



Beispiele zu Aufgabe 4 A

4 Bruchrechnungen aufschreiben

A Nimm ein Kärtchen von Aufgabe 3 und schreibe zu einigen Handskizzen Bruchrechnungen. Links siehst du zwei Beispiele.

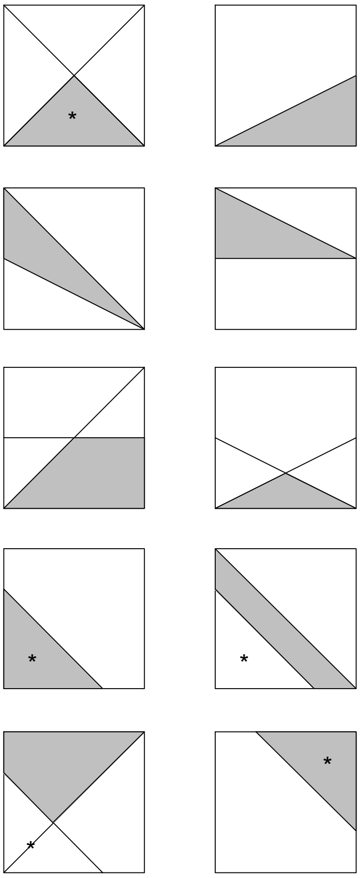
B Gib sie einer Mitschülerin, einem Mitschüler zum Überprüfen.

5 Bruchteile nachlegen

Lege auf verschiedene Arten ½ und ¼ des Quadrats und zeichne deine Lösungen auf. Du kannst auch mehrere Flächen übereinanderlegen.

6 Bruchteile vergleichen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe.



*Deckungsgleiche Dreiecke

A Die beiden grauen Dreieckflächen sind gleich gross.

B Die graue Dreieckfläche links ist kleiner als die graue Dreieckfläche rechts.

C Die graue Trapezfläche ist dreimal so gross wie die graue Dreieckfläche.

D Die graue Dreieckfläche ist grösser als die graue Trapezfläche.

E Die viereckige graue Fläche ist grösser als die dreieckige graue Fläche.

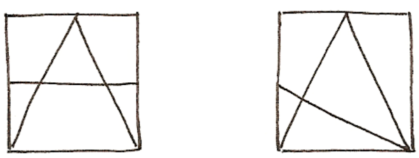
7 Kärtchenaufgabe

A Zeichne auf ein Kärtchen ein eigenes Figurenpaar wie bei Aufgabe 6 und formuliere eine Aussage. Verwende korrekte Begriffe.

B Notiere auf der Rückseite die Lösung mit einer kurzen Begründung.

C Tauscht die Kärtchen untereinander aus und überprüft die Lösungen.

8 Figuren untersuchen



Aus drei Formen gelegte Figuren

A An den Figuren links könnt ihr viele Sachen entdecken. Untersucht Flächeninhalte, Winkelbeziehungen, Streckenlängen, Seitenverhältnisse … und tauscht eure Feststellungen untereinander aus.

B Legt weitere Figuren und geht vor wie bei Aufgabe 8A.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum CH-Zahlenbuch/mathbu.ch		
V	Sich Bruchzahlen vorstellen	– Im Quadrat Teilflächen erzeugen	Zahlenbuch 6	S. 12	Geobrett
K	Bruchteile bestimmen	– Teilflächen miteinander vergleichen	Zahlenbuch 6	S. 18	1/4 + 1/5
M	Operationen verstehen und anwenden	– Teilflächen als Bruchteile der Quadratfläche schreiben	Zahlenbuch 6	S. 20	Brüche vergleichen
P	Strategien entwickeln		mathbu.ch 7	LU 30	Bruchbilder
		– Brüche anschaulich addieren und subtrahieren	mathbu.ch 8	LU 2	Gebrochene Zahlen

Zur Sache

Anhand selbst erzeugter Teilflächen werden Flächenanteile und Bruchteile bestimmt. Durch das Zusammenfügen einzelner Teilflächen zu einer grösseren Fläche können die Addition und die Subtraktion von Brüchen veranschaulicht werden. Aufgabe 8 kann zu Fragestellungen zur Ähnlichkeit, zu Winkelbeziehungen bis hin zum Satz des Pythagoras führen.

Voraussetzungen

Begriffe Quadrat, Trapez, gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck. Flächenberechnungen am Rechteck, Dreieck, Parallelogramm. Brüche als Anteil von einem Ganzen.

Zum Unterricht

Die Lernumgebung «Flächenanteile vergleichen» ist im CH-Zahlenbuch 6 an die S. 12 bis 13 angelehnt. Erste Aufgaben zum Erkennen von Bruchteilen findet man bereits im CH-Zahlenbuch 5. Für das 5./6. Schuljahr gehört das Belegen der Quadratform mit einer weiteren Form zum Grundstoff. Die Thematik wird in der Lernumgebung 30 im mathbu.ch 7 erneut aufgegriffen, wobei es dann aber um die Multiplikation von Bruchzahlen anhand des Rechteckmodells geht.

1 3 Die Aufgabenstellungen sind so angelegt, dass leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler lediglich eine oder zwei Formen auf das Quadrat legen, während leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler von Beginn an bereits mehrere Formen einsetzen. Zur Überprüfung der Berechnungen kann neben der gegenseitigen Kontrolle der Taschenrechner eingesetzt werden.

2 Es geht nicht darum, sämtliche Teilflächen einer Figur zu bestimmen. Das aktiv entdeckende Lernen steht hier im Vordergrund. Gewisse Flächen lassen sich nur durch Abmessen geeigneter Längen berechnen.

4 Bei dieser Aufgabe stehen das bildhafte und das experimentelle Operieren mit Bruchteilen im Vordergrund.

5 Ein Bruch kann geometrisch unterschiedlich dargestellt werden.

6 7 Durch das Überprüfen von Behauptungen wird vor allem das Argumentieren und Begründen gefördert.

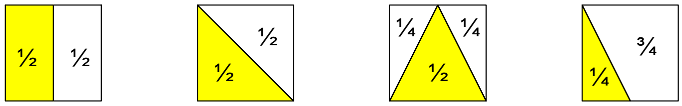
8 Die Offenheit dieser Aufgabe ermöglicht Entdeckungen in verschiedenen Bereichen: Winkelbeziehungen, Kongruenzsätze, Ähnlichkeit, Pythagoras…

Weiterführendes

Vergleicht man die Teilflächen mit der Einheitsfläche des Quadrats, so können die Flächenanteile in Prozenten oder als Dezimalzahlen angegeben, miteinander verglichen und verrechnet werden.
Die Lernumgebung kann auch zur Berechnung von Flächeninhalten von verschiedenen Figuren wie Dreiecken, Vierecken und n-Ecken eingesetzt werden, sofern man Längen von Strecken aus der Zeichnung herausmessen darf.
Die Lernumgebung eignet sich bis zum 9. Schuljahr für das Bruch- und Prozentrechnen und für das Thema Ähnlichkeit.

Lösungen

1 A, C

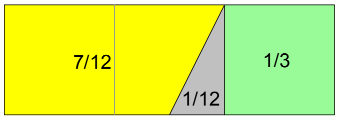


B Es kommen Rechtecke, rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke, rechtwinklige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecke und Trapeze vor.

---

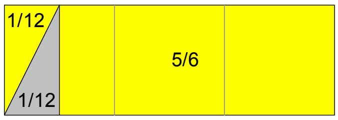
2 A–D Individuelle Lösungen.

Die Lösung der in der Aufgabenstellung am linken Rand dargestellten Anordnung sieht folgendermassen aus:

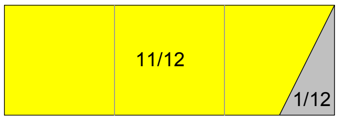


7/12 + 1/12 + 1/3 = 1
7/12 + 1/12 = 2/3
7/12 + 1/3 = 11/12
1/12 + 1/3 = 5/12

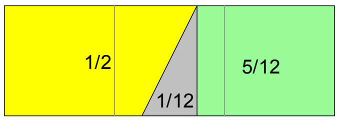
Einige weitere Lösungsmöglichkeiten:



1/12 + 1/12 + 5/6 = 1
1/12 + 1/12 = 1/6
1/12 + 5/6 = 11/12
usw.



11/12 + 1/12 = 1
1/3 + 1/3 + 1/4 = 11/12
2/3 + 1/4 = 11/12
usw.



1/2 + 1/12 + 5/12 = 1
1/2 + 1/12 = 7/12
1/2 + 5/12 = 11/12
1/12 + 5/12 = 1/2

E Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

---

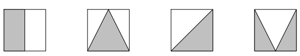
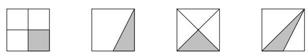
3 Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

---

4 Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

---

5 A Mögliche Lösungen:

½  ¼ 

---

6 A Wahre Aussage. Beide Flächen sind je ¼ der Quadratfläche.

B Falsche Aussage. Beide Flächen sind je ¼ der Quadratfläche. Beide Dreiecke besitzen die gleiche Grundseite und die gleiche Höhe.

Lösungen

C Wahre Aussage. Die Dreieckfläche misst 1/8, die Trapezfläche 3/8 der Quadratfläche.

D Falsche Aussage. Beide Flächen sind je ¼ der Quadratfläche.

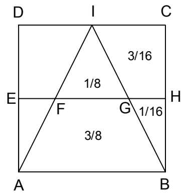
E Wahre Aussage. Die linke schraffierte Fläche misst 3/8, die rechte 1/4 oder 2/8 der Quadratfläche. 3/8 ist grösser als 2/8.

---

7 Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

---

8 A Beispiele für die linke Figur:



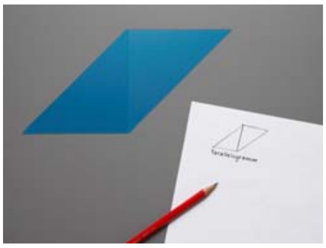
AF = FI; BG = GI (Streckenhalbierung durch Mittelparallele)
EF = GH = ¼ AB
FG = ½ AB; EF = ½ DI (Mittellinie im Dreieck)
∢ BAI = ∢ DIA (Wechselwinkel)
∢ AFG = ∢ FIC (Stufenwinkel)
∆ AFE ~ ∆ AID (Ähnlichkeit)
usw.

B Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

Lernumgebung «Parallelogramme»

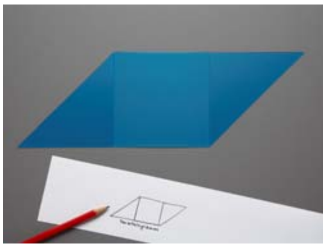
Material
Alle Formen

Mit den Formen kann man Vierecke legen. Umfang und Flächeninhalt von Parallelogrammen werden bestimmt.


Vierecke legen

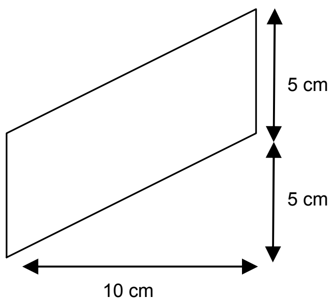
1 Vierecke legen mit zwei Dreieckformen

- **A** Lege Vierecke mit jeweils zwei Dreieckformen.
- **B** Skizziere mindestens ein Rechteck, ein Quadrat, ein allgemeines Parallelogramm und einen Rhombus.
- **C** Bestimme je den Umfang und den Flächeninhalt.
- **D** Zeichne je die Diagonalen ein und formuliere Erkenntnisse.


Parallelogramme skizzieren

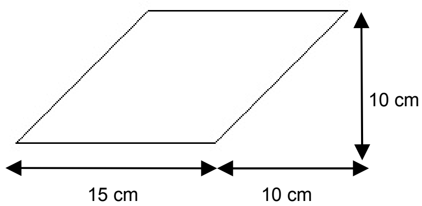
2 Vierecke legen mit mehreren Formen

- **A** Lege Vierecke mit mehreren Formen.
- **B** Skizziere die allgemeinen Parallelogramme.
- **C** Bestimme jeweils Umfang und Flächeninhalt.
- **D** Stellt einander mögliche Lösungen vor und diskutiert sie.



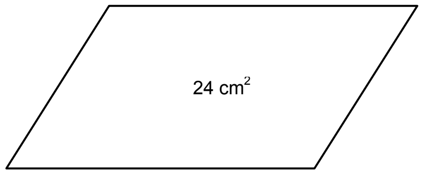
3 Umfang und Flächeninhalt eines Parallelogramms bestimmen

- **A** Zeichne das Parallelogramm links mit den angegebenen Massen.
- **B** Lege es mit den entsprechenden Formen aus. Verwandle es durch Umlegen von Formen in ein Rechteck.
- **C** Bestimme Flächeninhalt und Umfang des gezeichneten Parallelogramms.



4 Umfang und Flächeninhalt eines Parallelogramms bestimmen

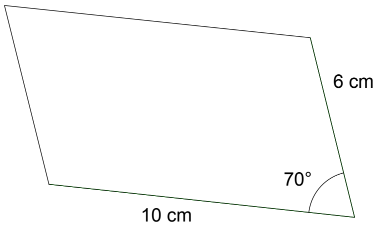
- **A** Zeichne das Parallelogramm links mit den angegebenen Massen.
- **B** Lege es mit den entsprechenden Formen aus. Verwandle es durch Umlegen von Formen in ein Rechteck.
- **C** Bestimme Flächeninhalt und Umfang des gezeichneten Parallelogramms.



5 **Parallelogramm mit vorgegebener Fläche zeichnen**

A Zeichne ein allgemeines Parallelogramm mit einem Flächeninhalt von 24 cm^2.

B Formuliere eine Anleitung, wie man das Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln kann.



6 **Parallelogramm zeichnen, Fläche bestimmen**

A Zeichne das Parallelogramm links mit den angegebenen Massen.

B Bestimme den Flächeninhalt durch Messen und Berechnen.

---

7 **Gib einen Tipp**

Erkläre, wie man den Flächeninhalt eines Parallelogramms bestimmen kann. Skizziere und beschreibe.

---

8 **Wahr oder falsch?**

Welche der Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Skizziere und begründe deine Antworten.

A Ein Quadrat und ein Rhombus mit gleicher Seitenlänge haben den gleichen Umfang.

B Ein Quadrat und ein Rhombus mit gleicher Seitenlänge haben den gleichen Flächeninhalt.

C Jedes Parallelogramm lässt sich in ein flächengleiches Rechteck verwandeln.

D Ein Rechteck und ein Parallelogramm mit dem gleichen Umfang haben den gleichen Flächeninhalt.

E Jeder Rhombus lässt sich in vier flächengleiche rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

---

9 **Weitere Aussagen**

Formuliere weitere Aussagen und lasse sie von deiner Lernpartnerin, deinem Lernpartner überprüfen.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum mathbu.ch		
V K M P	Sich Vierecke vorstellen Vierecke benennen, Umfang und Fläche unterscheiden Operationen anwenden Strategien entwickeln	– Handskizzen zeichnen – Fläche und Umfang von Parallelogrammen bestimmen	mathbu.ch 7	LU 8	Parallelogramme

Zur Sache

Anhand von gelegten und skizzierten Parallelogrammen werden Umfang und Flächeninhalt bestimmt. Dabei kann einerseits von der «Einheitslänge» 10 cm ausgegangen werden, es können aber auch fehlende Längen gemessen werden.

Voraussetzungen

Eigenschaften von Vierecken, insbesondere Parallelogrammen.
Begriffe Umfang und Flächeninhalt.

Zum Unterricht

Die Lernumgebung «Parallelogramme» ist an die Lernumgebung 8 im mathbu.ch 7 angelehnt. Umfang und Flächeninhalt von Quadraten und Rechtecken werden bereits im CH-Zahlenbuch 6 thematisiert.
Es werden Namen und Eigenschaften von Vierecken wiederholt: Die Lernenden legen mit den Formen Vierecke und skizzieren die Parallelogramme bzw. Rhomben. Deren Umfang und Fläche wird bestimmt.

1 Es geht nicht darum, alle möglichen Vierecke zu finden. Als Wiederholung können alle Vierecke benannt werden. Die Eigenschaften von Parallelogrammen werden wiederholt. Eine natürliche Differenzierung ergibt sich durch den unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad, den Umfang bzw. den Flächeninhalt der Figuren zu bestimmen.

2 Es geht nicht darum, alle möglichen Vierecke zu finden. Als Wiederholung können alle Vierecke benannt werden. Die Umfangs- und Flächenbestimmung beschränkt sich auf die allgemeinen Parallelogramme.

3 4 Ein vorgegebenes Parallelogramm wird mit den Formen ausgelegt, durch Umlegen von Formen in ein Rechteck verwandelt und so der Flächeninhalt bestimmt.

5 Ein Parallelogramm mit einem bestimmten Flächeninhalt soll gezeichnet werden. Die Lernenden zeigen, wie es in ein Rechteck verwandelt werden kann. Zur inneren Differenzierung kann z.B. nach allen ganzzahligen Möglichkeiten gefragt werden.

6 Der Flächeninhalt kann nun ohne Formen berechnet werden.

7 Die Lernenden finden eigene Formulierungen.

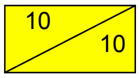
8 9 Aussagen überprüfen: Die Schülerinnen und Schüler werden im Bereich Erklären und Begründen gefördert.

Weiterführendes

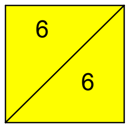
Die Kongruenz und die Symmetrie der gelegten Figuren kann untersucht werden.
Die Existenz von In- bzw. Umkreis der gelegten Figuren kann geklärt werden; sie kann auch ganz allgemein losgelöst von den Formen und den gelegten Figuren untersucht werden.
Kombinatorische Überlegungen (wie viele verschiedene Vierecke gibt es?) können weiterverfolgt werden.

Lösungen

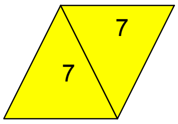
1 **B, C** Mögliche Lösungen (Umfang und Flächeninhalt sind nur dort angegeben, wo die Seite 10 cm bzw. ½ Seite vorkommt, d.h. wo ohne weiteres Messen u bzw. A bestimmt werden können).



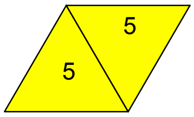
Rechteck
u = 30 cm,
A = 50 cm^2



Quadrat
u = 40 cm
A = 50 cm^2



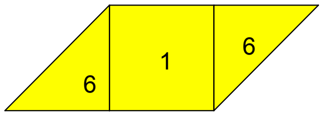
Parallelogramm
A = 100 cm^2



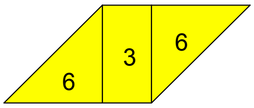
Rhombus
u = 40 cm

---

2 **A–C** Mögliche Lösungen (Umfang und Flächeninhalt sind nur dort angegeben, wo die Seite 10 cm bzw. ½ Seite vorkommt, d.h. wo ohne weiteres Messen u und A bestimmt werden können).



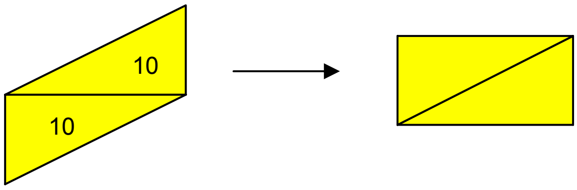
Parallelogramm
A = 200 cm^2



Parallelogramm
A = 150 cm^2

---

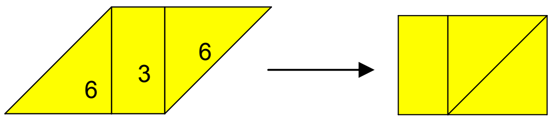
3 **A–C**



Parallelogramm, u ≈ 32.4 cm, A = 50 cm^2

---

4 **A–C**



Parallelogramm, u ≈ 58.3 cm, A = 150 cm^2

---

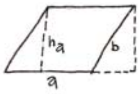
5 Individuelle Lösungen.

---

6 A ≈ 57 cm^2

Lösungen

7 Schülerlösung:



Bei einem Parallelogramm sind die beiden "Dreiecke" genau gleich. Wenn man die Höhe a mit der Seite a multipliziert erhält man ein Rechteck. Man kann sich vorstellen, dass man das Dreieck auf einer Seite entfernt und auf der anderen hinzufügt. Dasselbe kann man auch mit der Höhe b und der Seite b machen.

---

8 Die Aussagen B und D sind falsch.

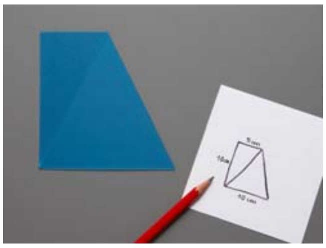
---

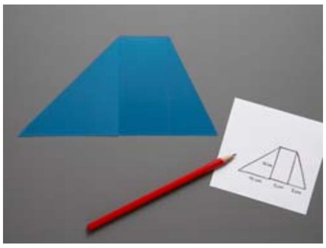
9 Individuelle Lösungen.

Lernumgebung «Trapeze»

Material
Alle Formen, A3-Blätter

Mit Dreiecken und Vierecken kann man Trapeze legen. Davon ausgehend lässt sich der Flächeninhalt dieser Trapeze berechnen.





Trapeze legen

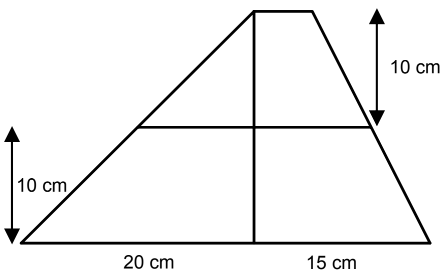
1 Trapeze legen

A Lege mit den Formen Trapeze und skizziere sie.

B Wähle zwei Trapeze aus und zeichne sie in einem geeigneten Massstab auf ein A4-Blatt.

C Bestimme die Flächeninhalte.

D Stellt einander mögliche Lösungswege vor und diskutiert sie.



Zusammengesetztes Trapez

2 Trapez nachlegen und in flächengleiche Figuren verwandeln

A Das Trapez links wird von zwei kleineren Trapezen gebildet. Zeichne es mit den vorgegebenen Massen auf ein A3-Blatt.

B Lege es mit den entsprechenden Formen aus.

C Verwandle das grosse Trapez durch Umlegen von Formen in ein Parallelogramm. Skizziere.

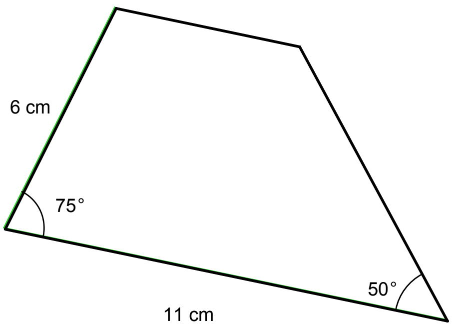
D Mit den verwendeten Formen lässt sich das ganze Trapez zu einem Rechteck umlegen. Skizziere.

E Dieses besondere Trapez lässt sich zu einem Quadrat umlegen. Skizziere.

F Bestimme den Flächeninhalt.

3 Trapeze suchen

Lege weitere «zweistöckige» Trapeze wie bei Aufgabe 2, die sich durch Umlegen von Formen in ein Rechteck verwandeln lassen.
Skizziere.

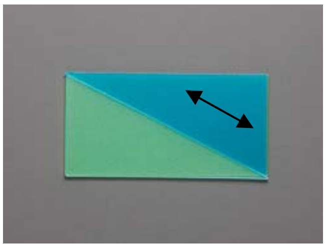


❹ Trapeze suchen

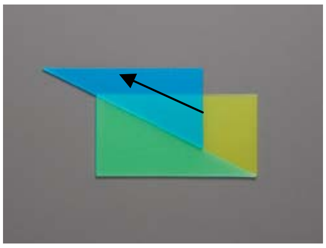
A Zeichne das Trapez links mit den angegebenen Massen.

B Bestimme den Flächeninhalt durch Messen und Berechnen.

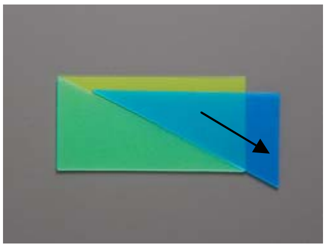
C Stellt einander mögliche Lösungswege vor und diskutiert sie.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

❺ Dreieck schieben

A Lege zwei Dreieckformen wie in Figur 1 abgebildet auf eine Rechteckform.

B Verschiebe das obere Dreieck wie in Figur 2 oder 3 abgebildet entlang der Diagonalen des Rechtecks. Es werden jeweils zwei Trapeze sichtbar. Skizziere und beschreibe.

C Vergleiche Flächeninhalt und Umfang der beiden Trapeze in verschiedenen Positionen des Dreiecks.

---

❻ Gib einen Tipp

Erkläre, wie man den Flächeninhalt eines Trapezes bestimmen kann. Skizziere und beschreibe.

---

❼ Wahr oder falsch?

Welche der Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe deine Antworten.

A Trapeze mit gleichem Umfang haben auch den gleichen Flächeninhalt.

B (Parallele 1 + Parallele 2) : 2 = Trapezfläche.

C (Parallele 1 + Parallele 2) : 2 · Höhe = Trapezfläche.

D In einem gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen gleich lang.

E Die Diagonalen in einem Trapez stehen nie senkrecht aufeinander.

---

❽ Weitere Aussagen

Formuliere weitere Aussagen und lasse sie von deiner Lernpartnerin, deinem Lernpartner überprüfen.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum mathbu.ch		
V	Geometrisches Vorstellungsvermögen	– Trapezflächen in flächengleiche Figuren verwandeln	mathbu.ch 8	LU 6	Entwicklung von zwei bis acht
K	Eigenschaften von Trapezen kennen	– Flächeninhalte von Trapezen bestimmen			
M	Flächengleichheiten erkennen				
P	Strategien entwickeln				

Zur Sache

In der Einstiegsphase werden mit den Formen verschiedene Trapeze gelegt und skizziert; anhand der gelegten Figuren können die Flächeninhalte bestimmt werden. Dabei kann einerseits von der «Einheitslänge» 10 cm ausgegangen werden, andererseits können aber auch fehlende Längen gemessen werden.
In einer zweiten Phase wird ein vorgegebenes Trapez mit den entsprechenden Figuren ausgelegt und in bereits bekannte flächengleiche Vierecke verwandelt; so kann der Flächeninhalt bestimmt werden.
Diese Erkenntnis kommt bei den folgenden Aufgaben zum Tragen, wenn Flächeninhalte von beliebigen Trapezen bestimmt werden.

Voraussetzungen

Eigenschaften von Drei- und Vierecken, insbesondere von Trapezflächen.
Flächeninhalt von Quadrat und Rechteck.

Zum Unterricht

Die Lernumgebung «Trapeze» ist an die Lernumgebung 6 im mathbu.ch 8 angelehnt.

1 Es geht nicht darum, alle möglichen Trapeze zu finden. Eine natürliche Differenzierung ergibt sich von alleine. Als Variante können die Trapeze bezüglich der Anzahl und Art der gelegten Formen und/oder der Eigenschaften (gleichschenklig? rechtwinklig?) systematisch erfasst werden.

2 Ein vorgegebenes Trapez wird mit den Formen ausgelegt. Mit Hilfe der Formen wird das Trapez in ein Rechteck bzw. in ein Quadrat verwandelt und so der Flächeninhalt bestimmt.

3 «Einstöckige» Trapeze werden bei Aufgabe 1 gefunden.

4 Die Fertigkeiten Winkel und Parallelen zeichnen werden verlangt. Der Flächeninhalt wird ohne Hilfe der Formen bestimmt.

5 Die Flächengleichheit zweier Trapeze wird mit Hilfe der Formen gezeigt. Zur Differenzierung kann diese Frage für beliebige rechtwinklige Dreiecke untersucht werden.
Es empfiehlt sich, verschiedenfarbige Formen zu verwenden.

6 Die Lernenden finden eigene Formulierungen.

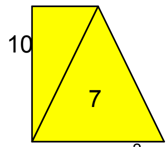
7 8 Aussagen überprüfen: Die Schülerinnen und Schüler werden im Bereich Erklären und Begründen gefördert.

Weiterführendes

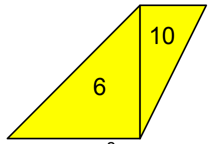
Die Kongruenz und die Symmetrie der gelegten Figuren kann untersucht werden.
Die Existenz von In- bzw. Umkreis der gelegten Figuren kann geklärt werden; sie kann auch ganz allgemein losgelöst von den Formen und den gelegten Figuren untersucht werden.
Kombinatorische Überlegungen (wie viele verschiedene Trapeze gibt es?) können weiterverfolgt werden.

Lösungen

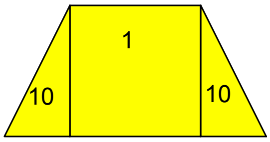
1 A, C Mögliche Lösungen:



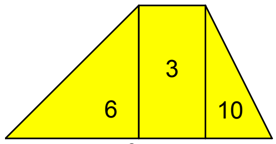
A = 75 cm^2



A = 75 cm^2



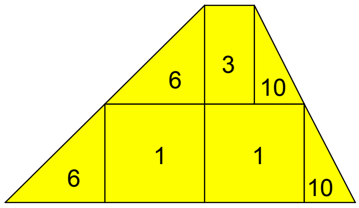
A = 150 cm^2



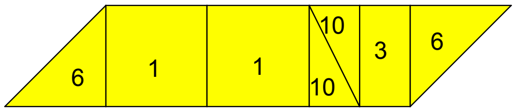
A = 125 cm^2

---

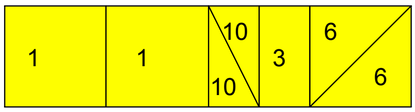
2 A, B



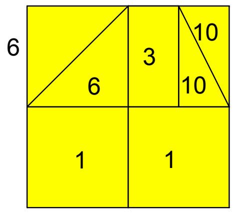
C



D



E



F A = 400 cm^2

---

3 Das zweistöckige Trapez kann ausgebaut werden.

---

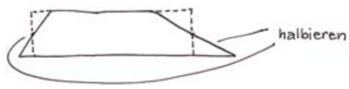
4 A ≈ 45.5 cm^2

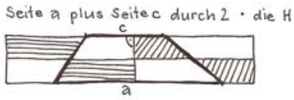
Lösungen

5 Die beiden Trapeze sind flächengleich (Restfläche der rechtwinkligen Dreiecke). Der Umfang des oberen Trapezes ist immer grösser als der Umfang des Trapezes rechts.

---

6 Schülerlösungen:





---

7 Die Aussagen A, B und E sind falsch.

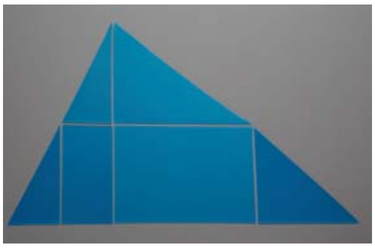
---

8 Individuelle Lösungen.

Lernumgebung «Dreiecke und Vielecke»

Material
Alle Formen

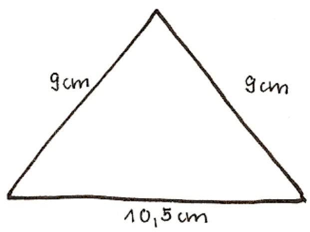
Mit den vorliegenden Dreieckformen kann man Vielecke legen. Mit Hilfe der Teilflächen lässt sich auch der Flächeninhalt der Vielecke berechnen.



Dreieck mit Formen gelegt

1 Dreieck nachlegen und in flächengleiche Figuren verwandeln

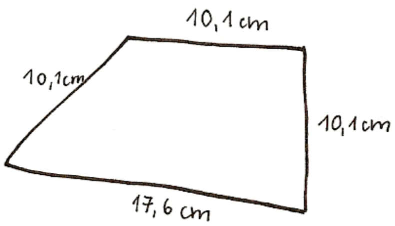
- **A** Lege das abgebildete Dreieck mit den entsprechenden Formen nach.
- **B** Verwandle das Dreieck durch Umlegen der Formen in ein flächengleiches Parallelogramm. Skizziere.
- **C** Verwandle das Dreieck durch Umlegen der Formen in ein flächengleiches Rechteck. Skizziere.
- **D** Bestimme den Flächeninhalt.



Dreieckform umfahren

2 Umfang und Flächeninhalt von Dreiecken bestimmen

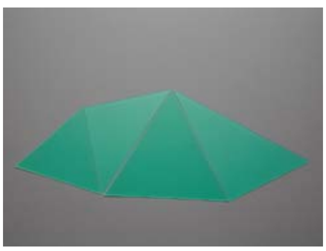
- **A** Umfahre jede Dreieckform mit einem Stift.
- **B** Bestimme den Umfang der gezeichneten Dreiecke.
- **C** Bestimme den Flächeninhalt der gezeichneten Dreiecke.
- **D** Tausche und diskutiere die Ergebnisse mit deiner Lernpartnerin, deinem Lernpartner.



Gelegtes Viereck umfahren

3 Vierecke legen, Umfang und Fläche bestimmen

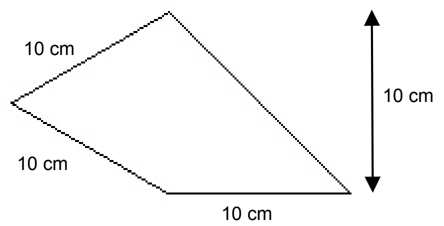
- **A** Lege Vierecke mit zwei unterschiedlichen Dreieckformen.
- **B** Suche ein möglichst grosses und ein möglichst kleines Viereck und umfahre sie mit einem Stift.
- **C** Bestimme die Flächeninhalte der gezeichneten Vierecke.
- **D** Weshalb kannst du keine Parallelogramme legen? Begründe.



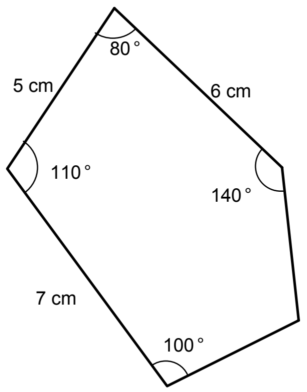
Gelegtes Sechseck

4 Vielecke legen

- **A** Lege Vielecke mit mehreren unterschiedlichen Dreieckformen.
- **B** Umfahre die gefundenen Vielecke mit einem Stift.
- **C** Bestimme die Flächeninhalte der gezeichneten Vielecke.
- **D** Stellt einander mögliche Lösungswege vor und diskutiert sie.



Allgemeines Viereck



Allgemeines Fünfeck

5 Figur legen, Fläche und Umfang bestimmen

A Zeichne dieses Viereck mit den angegebenen Massen.

B Lege es mit den entsprechenden Formen aus.

C Bestimme Flächeninhalt und Umfang.

---

6 Fünfeck zeichnen, Fläche und Umfang bestimmen

A Zeichne dieses Fünfeck mit den angegebenen Massen.

B Bestimme Flächeninhalt und Umfang durch Messen und Berechnen

---

7 Gib einen Tipp

Erkläre, wie man den Flächeninhalt eines Dreiecks bestimmen kann. Skizziere und beschreibe.

---

8 Gib einen Tipp

Erkläre, wie man den Flächeninhalt eines Vielecks bestimmen kann. Skizziere und beschreibe.

---

9 Wahr oder falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe deine Antworten.

A Dreiecke mit gleichem Umfang haben auch den gleichen Flächeninhalt.

B Dreiecke mit gleicher Höhe sind flächengleich.

C Jedes Rechteck kann in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.

D Jedes Dreieck kann in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.

E Jedes n-Eck lässt sich in (n – 2) Dreiecke zerlegen.

---

10 Weitere Aussagen

Formuliere weitere Aussagen und lasse sie von deiner Lernpartnerin, deinem Lernpartner überprüfen.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum mathbu.ch		
V	Geometrisches Vorstellungsvermögen schulen	– Dreieckflächen berechnen	mathbu.ch 7	LU 9	Dreiecke als Bausteine
K	Flächenberechnung	– Skizzieren und messen			
M	Flächenverwandlung	– Fläche und Umfang von Dreiecken und Vielecken bestimmen			
P	Suchstrategien entwickeln				

Zur Sache

Nach dem Auslegen eines Vierecks mit Formen werden Flächeninhalt und Umfang von beliebigen Vielecken bestimmt.

Voraussetzungen

Eigenschaften von «Dreiecken und Vielecken».
Umfang und Flächeninhalt.

Zum Unterricht

Die Lernumgebung «Dreiecke-Vielecke» ist an die Lernumgebung 9 im mathbu.ch 7 angelehnt.
Es geht zunächst darum, Dreiecke zu umfahren, benötigte Strecken zu messen sowie den Umfang und den Flächeninhalt der gezeichneten Figuren zu bestimmen.
Dass hier je nach «Umfahrungstechnik» und Stift die Ergebnisse variieren, liegt auf der Hand.
Eine Diskussion über sinnvolle Genauigkeit kann hier fruchtbar sein.
(Variante: die nötigen Strecken direkt an den Formen messen.)
Danach werden mit den Dreiecken verschiedene Vierecke bzw. Vielecke gelegt; die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten ist nicht zu unterschätzen.

1 Hier wird ein Dreieck mit den Formen ausgelegt. Mit Hilfe der Formen wird das Dreieck in ein flächengleiches Rechteck verwandelt und so der Flächeninhalt bestimmt.

2 Alle Dreieckformen werden umfahren und durch Messen und Berechnen Umfang und Flächeninhalt bestimmt.

3 Mit zwei Dreieckformen werden Vierecke gelegt und deren Umfang und Fläche bestimmt.

4 Mit mehreren Dreieckformen werden Vielecke gelegt und deren Umfang und Fläche bestimmt.
Variante für Fortgeschrittene: Alle Formen zulassen, nicht nur Dreieckformen.

5 Ein vorgegebenes Viereck wird mit entsprechenden Formen ausgelegt und so werden Umfang und Fläche bestimmt.

6 Umfang und Fläche werden ohne Hilfe der Formen bestimmt.

7 8 Die Lernenden finden eigene Formulierungen.

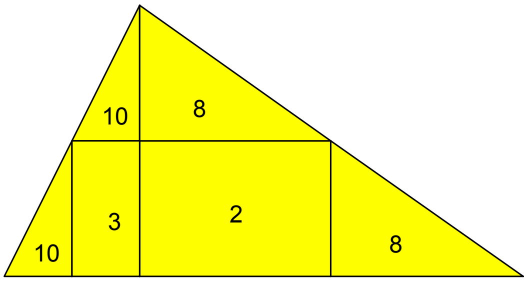
9 10 Aussagen überprüfen: Die Schülerinnen und Schüler werden im Bereich Erklären und Begründen gefördert.

Weiterführendes

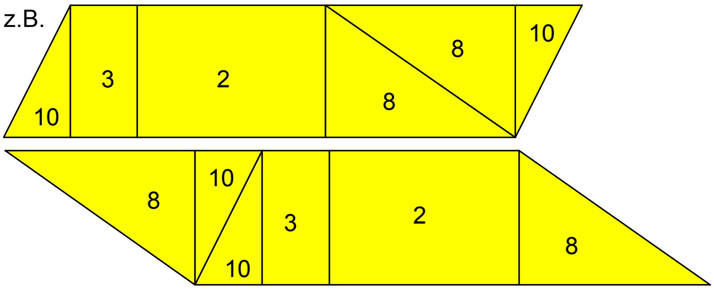
Alle Vierecke legen, die mit vier rechtwinkligen Dreieckformen möglich sind (Lösungen siehe nächste Seite).
Alle Möglichkeiten suchen, um mit zwei (drei...) Dreieckformen ein Viereck (Fünfeck...) zu legen, und die dabei auftauchenden Fragen nach den Winkelgrössen der Dreiecke klären.
Regelmässige Vielecke konstruieren.

Lösungen

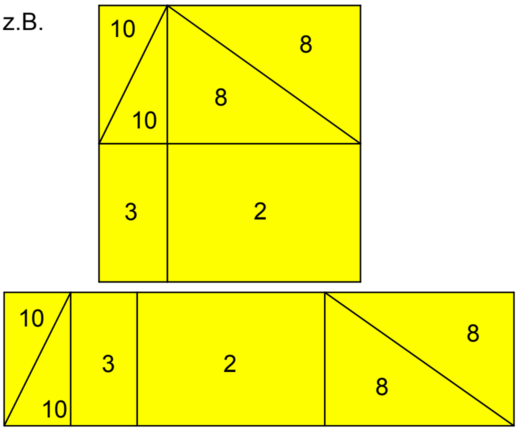
1 **A**



B z.B.



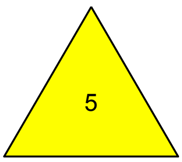
C z.B.



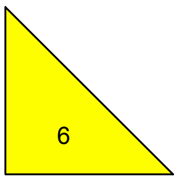
D A ≈ 383 cm^2

---

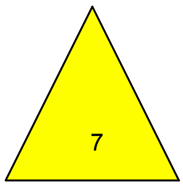
2 **A–C**



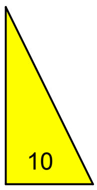
gleichseitiges Dreieck
u ≈ 30.6 cm,
A ≈ 44.9 cm^2



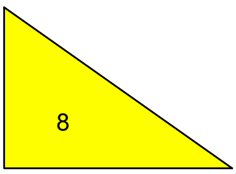
rechtw.-gleichsch. Dreieck
u ≈ 35 cm,
A ≈ 52 cm^2



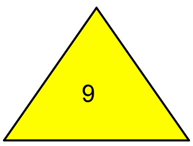
gleichsch. Dreieck
u ≈ 33 cm,
A ≈ 52 cm^2



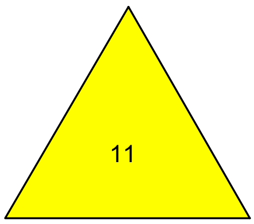
rechtw. Dreieck
u ≈ 26.7 cm,
A ≈ 26 cm^2



rechtw. Dreieck
u ≈ 42.2 cm,
A ≈ 73.4 cm^2



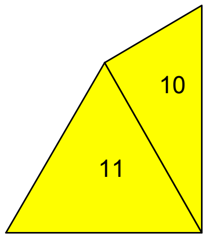
gleichsch. Dreieck
u ≈ 28.5 cm,
A ≈ 38.3 cm^2



gleichseitiges Dreieck
u ≈ 43.2 cm,
A ≈ 89.3 cm^2

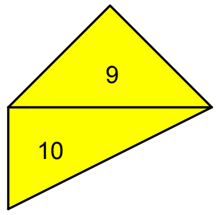
Lösungen

3 **A–C** Grösstes Viereck:



u ≈ 56.6 cm,
A ≈ 162.7 cm^2

Kleinstes Viereck:



u ≈ 34.5 cm,
A ≈ 64.3 cm^2

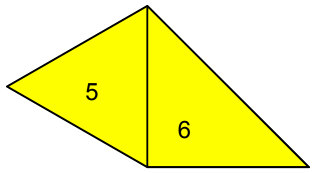
D Um ein Parallelogramm zu legen, braucht es aus Symmetriegründen mindestens zwei gleiche Dreiecke.

---

4 Nebst dem abgebildeten Beispiel gibt es viele verschiedene Möglichkeiten.

---

5 **A, B**



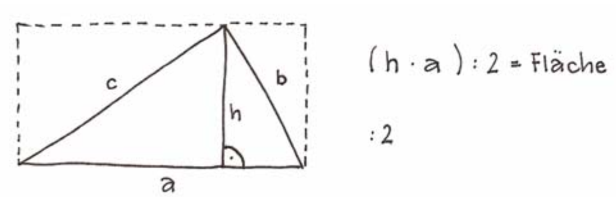
C u ≈ 45 cm, A ≈ 96.9 cm^2

---

6 u ≈ 25.9 cm, A ≈ 42.5 cm^2

---

7 Schülerlösung:



---

8 Individuelle Lösungen.

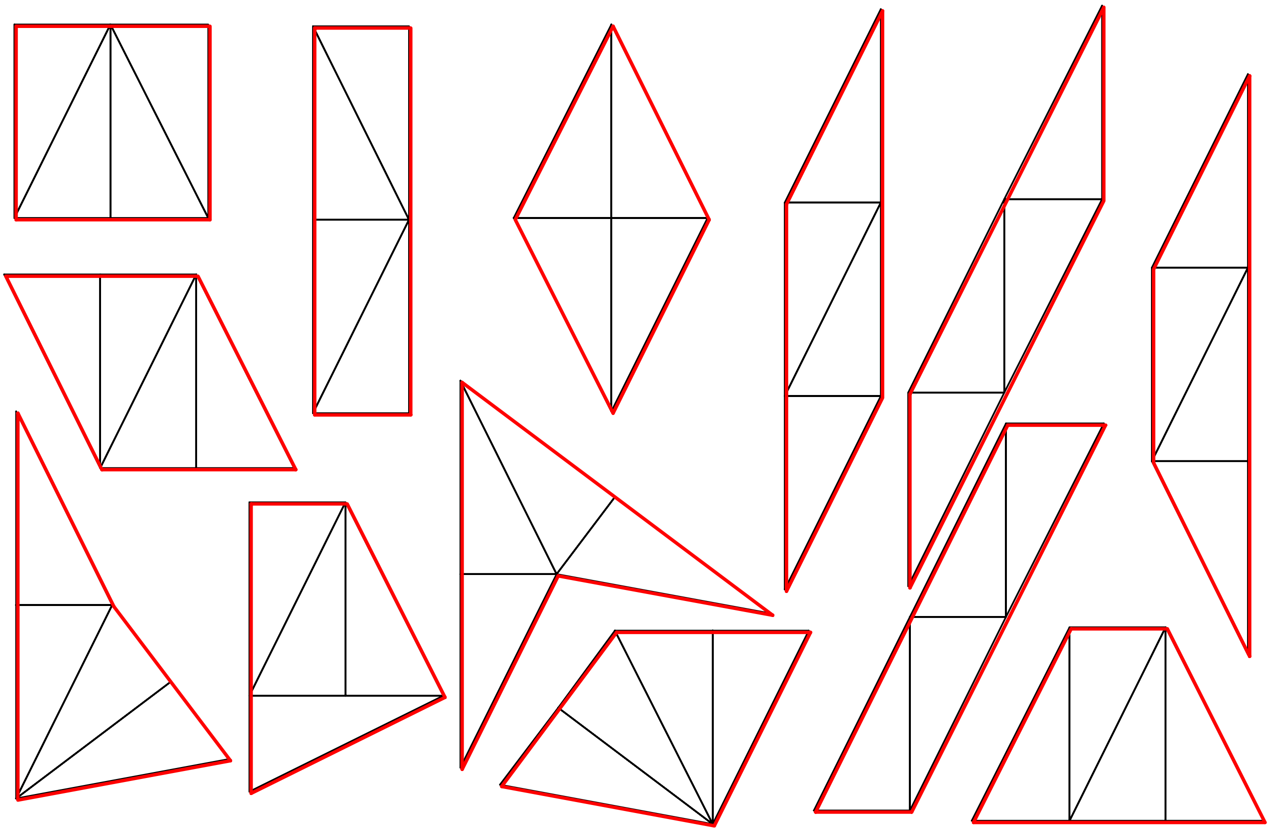
---

9 Die Aussagen A und B sind falsch.

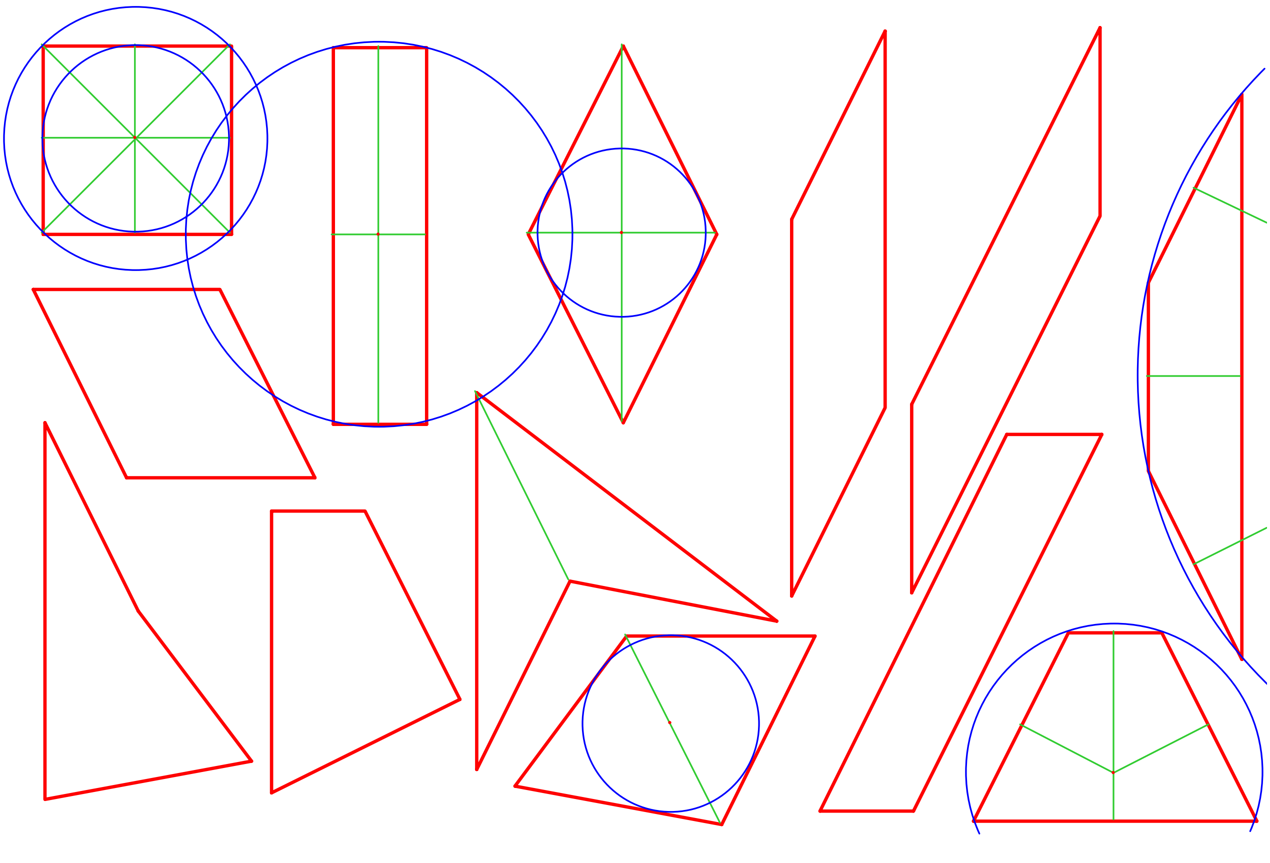
---

10 Individuelle Lösungen.

Lösung zu Weiterführendes: Alle Vierecke legen, die mit vier rechtwinkligen Dreieckformen (Nr. 10) möglich sind.
Nebst der Herausforderung, alle 13 Möglichkeiten zu finden, ist es interessant, die Vierecke zu benennen.



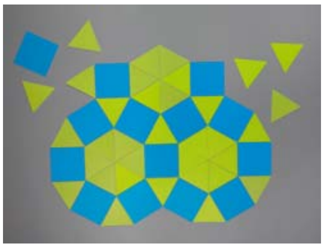
Auch Betrachtungen zur Symmetrie und zur Frage, ob die Vierecke einen Um- bzw. Inkreis haben, sind lohnenswert.



Lernumgebung «Parkette»

Material
Verschiedene Formen in verschiedenen Farben

Unter einem Parkett verstehen wir eine vollständige, überlappungsfreie Überdeckung der Ebene durch Vielecke.
Parkette kann man legen und daran Symmetrieeigenschaften untersuchen.



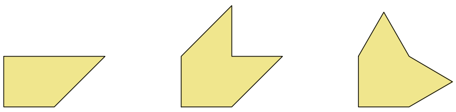
Mit zwei verschiedenen Formen gelegtes Parkett

1 Mit Formen Parkette legen und untersuchen

A Links siehst du ein Parkett. Lege ein eigenes Parkett und skizziere es.

B Suche Gesetzmässigkeiten in deinem Parkett und beschreibe sie.

C Lege weitere Parkette und untersuche sie ebenfalls auf Gesetzmässigkeiten.



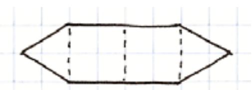
Figuren zu Aufgabe 2

2 Mit vorgegebenen Figuren eigene Parkette legen

A Wähle eine der Figuren links und lege sie mit den Formen aus dem Set. Fixiere die Formen mit Klebstreifen, so dass die Figur zusammenhält. Stelle auf die gleiche Weise mehrere solche Figuren her.

B Lege nun mit den hergestellten Figuren verschiedene Parkette und skizziere sie.

C Wiederhole Aufgabe 4A−B mit einer anderen Figur links.

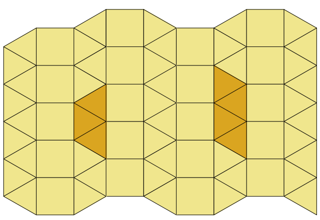


Eine mögliche Figur zu Aufgabe 3A

3 Mit eigenen Figuren Parkette legen

A Entwirf Figuren, die aus zwei Quadratformen 1 und zwei Dreieckformen 5 zusammengesetzt sind. Skizziere mehrere Möglichkeiten.

B Mit welchen Figuren aus Aufgabe 3A lassen sich Parkette legen, mit welchen nicht? Skizziere und begründe.



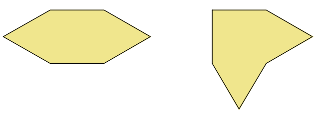
Parkett zu Aufgabe 4 mit zwei eingezeichneten Figuren

4 Geometrische Figuren im Parkett suchen

A Lege und skizziere das Parkett links.

B Im Parkett links sind zwei geometrische Figuren eingezeichnet. Suche weitere geometrische Figuren. Zeichne und benenne sie.

C Untersuche die gefundenen geometrischen Figuren auf ihre Symmetrieeigenschaften.



Figuren zu Aufgabe 5

5 Mit Figuren vorgegebenes Parkett legen

A Links sind zwei unterschiedliche Figuren abgebildet. Sie lassen sich mit den Formen aus dem Set legen. Skizziere verschiedene Möglichkeiten.

B Untersuche, ob sich das Parkett bei Aufgabe 4 mit einer der links abgebildeten Figuren legen lässt.

C Entwirf eine eigene Figur, mit der sich das Parkett bei Aufgabe 4 legen lässt.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum CH-Zahlenbuch/mathbu.ch		
V	Sich ebene Figuren vorstellen	– Ästhetische Komponenten der Mathematik erkennen	Zahlenbuch 5	S. 10	Ornamente
K	Zeichnen, skizzieren		Zahlenbuch 6	S. 5	Ornamente
M	Muster erkennen, Gesetzmässigkeiten darstellen	– Methoden zur Herstellung von Flächenornamenten kennen lernen und anwenden können	mathbu.ch 7	LU 25	Schmetterling und Propeller
M	Anleitungen umsetzen		mathbu.ch 8	LU 20	Musterschule
P	Experimentieren	– Eigenschaften der Achsen- und Punktsymmetrie kennen			
		– Symmetrieeigenschaften von geometrischen Figuren kennen			

Zur Sache

Durch das Legen von Parketten wird das Vorstellungsvermögen geschult. An Parketten lassen sich Symmetrieeigenschaften erkunden.

Voraussetzungen

Achsensymmetrie, Punktsymmetrie, Drehsymmetrie.

Zum Unterricht

Mit Formen aus dem Set können Parkette gelegt werden. Durch Formen in verschiedenen Farben entstehen spannende Muster.
Mehrere Formen aus dem Set können auch zu Figuren zusammengesetzt werden, die dann ihrerseits zum Parkettieren geeignet sind.

1. Bei dieser Einstiegsaufgabe steht das Ausprobieren und Experimentieren im Vordergrund. Die Parkette können zum Beispiel fotografiert werden. Wichtig ist, dass die von den Schülerinnen und Schülern gemachten Feststellungen und Erfahrungen innerhalb der Klasse diskutiert werden.

2. Bei der Aufgabe 1 stand das Parkettieren mit Formen aus dem Set im Vordergrund. Bei dieser Aufgabe werden vorerst mit Formen aus dem Set Figuren gebildet. Nun gilt es, mit diesen Figuren Parkette zu legen.
Die aus einem Quadrat und zwei gleichseitigen Dreiecken gebildete Figur bietet Gelegenheit, die gegenseitige Lage der Figuren im Parkett zu diskutieren. Durch welche Abbildung kommt man von einer Figur im Parkett zu einer anderen Figur im Parkett? Im Parkett kommen Achsenspiegelungen, Punktspiegelungen, Translationen und Rotationen vor.

3. Bei dieser Aufgabe steht das Parkettieren mit Figuren im Vordergrund.

4. Bei dieser Aufgabe werden Symmetrieeigenschaften von verschiedenen Figuren im Parkett untersucht. Neben gleichseitigen Dreiecken und Quadraten kommen Rauten, Parallelogramme, Trapeze, Fünf-, Sechs-, Achtecke usw. vor. An diesen Figuren können weitere Eigenschaften wie Winkelbeziehungen, gegenseitige Lage von Seiten, die Eigenschaften von Diagonalen usw. untersucht werden.

5. Die Fragestellung, in welchen Fällen eine Parkettierung möglich ist und in welchen nicht, kann anhand der Winkel untersucht werden.

Weiterführendes

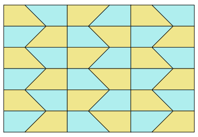
Mit der Lernumgebung 20 im mathbu.ch 8 lässt sich das Thema Parkettieren weiterführen. Der Einsatz des Computers bietet zahlreiche Erweiterungsmöglichkeiten. Zudem können anhand von Parketten Winkelsätze thematisiert werden.

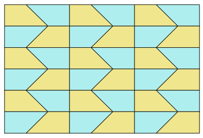
Lösungen

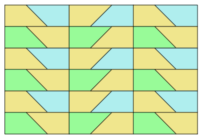
1 A–C Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.
Mögliche Beobachtungen sind: Regelmässigkeiten innerhalb gewisser Parkettausschnitte wie Translationen, Rotationen, Punktspiegelungen, Geradenspiegelungen, Winkelbeziehungen, Formen, Farbmuster…

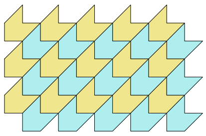
---

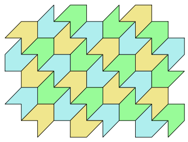
2 B, C Unten sind einige Möglichkeiten gezeichnet.

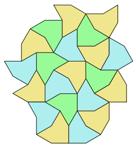

Mit Figur 1 gelegtes Parkett


Mit Figur 1 gelegtes Parkett


Mit Figur 1 gelegtes Parkett

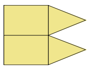

Mit Figur 2 gelegtes Parkett

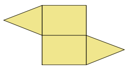

Mit Figur 2 gelegtes Parkett

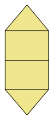

Mit Figur 3 gelegtes Parkett

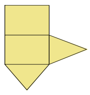
---

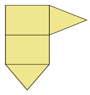
3 A


Parkettierung möglich

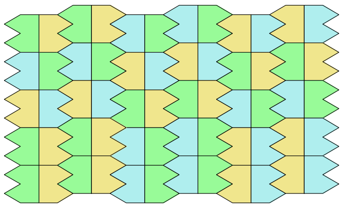

Parkettierung nicht möglich

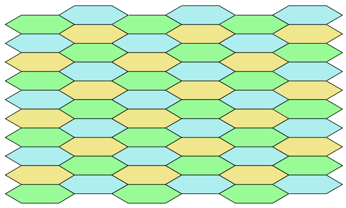

Parkettierung möglich


Parkettierung nicht möglich


Parkettierung nicht möglich

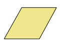
B


Die vertikalen Streifen können beliebig gegeneinander verschoben werden.

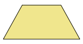
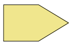
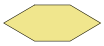
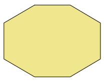
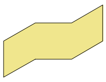


---

4 B, C

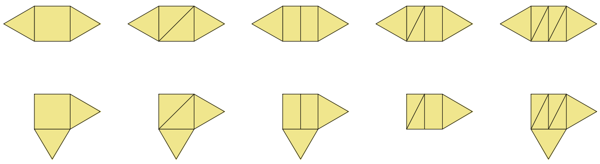
	Gleichseitiges Dreieck	achsensymmetrisch (3 Symmetrieachsen) drehsymmetrisch (120°)
	Quadrat	achsensymmetrisch (4 Symmetrieachsen) punktsymmetrisch drehsymmetrisch (90°)
	Raute oder Rhombus	achsensymmetrisch (2 Symmetrieachsen) punktsymmetrisch

Lösungen

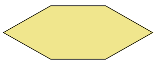
	Parallelogramm	punktsymmetrisch
 	Gleichschenkliges Trapez Fünfeck	achsensymmetrisch (1 Symmetrieachse) achsensymmetrisch (1 Symmetrieachse)
	Sechseck	achsensymmetrisch (2 Symmetrieachsen) punktsymmetrisch
	Achteck	achsensymmetrisch (2 Symmetrieachsen) punktsymmetrisch
	Achteck	punktsymmetrisch

---

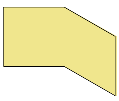
5 **A**



B Die Parkettierung ist nur mit der folgenden Figur möglich:



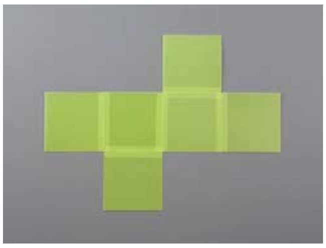
C Eine mögliche Figur könnte folgendermassen aussehen:



Lernumgebung «Vom Netz zum Würfel»

Material
Quadratform 1
Klebestreifen

Mit Quadratflächen kann man Würfelhüllen bauen. Legt man die Hülle ausgebreitet auf den Tisch, ist dies eine Abwicklung oder ein Netz. Jedoch nur bestimmte Quadratanordnungen lassen sich auch zu einem Würfel formen.


Würfelnetz aus Quadratformen

1 Würfelnetze suchen

Suche alle unterschiedlichen Würfelnetze und zeichne sie auf.
Wie viele nicht kongruente Netze gibt es?

2 Zu zweit: Grundfläche gegeben, Deckfläche gesucht

A Legt ein Würfelnetz. Die erste Person zeigt auf ein Quadrat des Netzes. Das ist die Grundfläche. Die andere Person muss jetzt die entsprechende Deckfläche zeigen.
Dann tauscht ihr die Rollen. Wenn ihr nicht sicher seid, formt ihr das Netz zum Würfel und überprüft eure Lösung.

B Markiere auf deinen gezeichneten Netzen aus Aufgabe 1 sich jeweils gegenüberliegende Seiten des Würfels mit der gleichen Farbe.

3 Spiel zu zweit: Netze legen

Toni und Tanja legen ein Würfelnetz. Toni nimmt ein Quadrat weg und fügt es an einer anderen Stelle des Netzes wieder an. Wenn dadurch ein neues Netz entsteht, erhält Toni einen Gewinnpunkt. Nun ist Tanja an der Reihe. Sie muss ein anderes Quadrat verschieben. Jedes Mal, wenn ein noch nicht gelegtes Netz entsteht, gibt es einen Gewinnpunkt. Die Spielenden zeichnen fortlaufend die entstandenen Würfelnetze auf und notieren die gewonnenen Punkte auf.

4 Gib einen Tipp

Worauf muss man achten, wenn man aus Quadratflächen ein Würfelnetz bildet? Beschreibe und skizziere.

5 Wahr oder falsch?

Welche der Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe.

A Bei einem Würfelnetz liegen nie mehr als vier Quadrate in einer Reihe.
B Das Netz muss nicht zwingend aus sechs Quadraten bestehen.
C Die Deckfläche kann direkt neben der Grundfläche liegen.
D Deck- und Grundfläche müssen immer in einer Reihe liegen.
E In einer Reihe liegen immer mindestens drei Quadrate.
F Schreibe weitere Aussagen auf und lasse sie von deiner Lernpartnerin, deinem Lernpartner überprüfen.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum CH-Zahlenbuch/mathbu.ch		
V	Sich ebene und räumliche Figuren vorstellen	– Sich die Würfelnetze vorstellen	Zahlenbuch 6	S. 72	Rauminhalt
V	Sich Zusammenhänge und Veränderungen vorstellen	– Würfelnetze untersuchen	mathbu.ch 7	LU 13	Kopfgeometrie
M	Argumentieren, begründen und widerlegen				
P	Protokollieren, dokumentieren				

Zur Sache

Die Vorstellung vom Raum zur Ebene ist eine wichtige Voraussetzung, um zum Beispiel Pläne oder Anleitungen zu lesen. An Würfeln wird das Hin und Zurück vom Raum zur Ebene geübt.

Voraussetzungen

Begriffe: Würfel, kongruent.

Zum Unterricht

Mit Quadratflächen werden zuerst experimentell, dann zur Verifizierung Netze gelegt. Bei Unsicherheiten können die Schülerinnen und Schüler jederzeit ihre Lösungen überprüfen, indem sie die Quadratflächen zu einem Würfel formen.
Das Hin und Her vom Raum zur Ebene wird hier intensiv geübt.

1. Wer sich noch wenig mit Netzen beschäftigt hat, sollte sich für diese Aufgabe Zeit nehmen. Jeder und jede muss sicher sein, dass das gezeichnete Netz richtig ist. Das Überprüfen am Objekt ist ein wichtiger Schritt, um die nötige Vorstellung aufzubauen.

2. Diese Aufgabe verlangt einen weiteren Abstraktionsschritt. Die Schülerinnen und Schüler stellen sich den Würfel anhand der gezeichneten Netze vor. Wer nicht sicher ist, soll am Objekt überprüfen.

3. Die verschiedenen Formen der Würfelnetze werden repetiert. Die Spielform führt zu einem geläufigen Erkennen der Würfelnetze.

4. Die Schülerinnen und Schüler gehen gedanklich das Bauen von Würfelnetzen durch − ein weiterer Verinnerlichungsschritt.

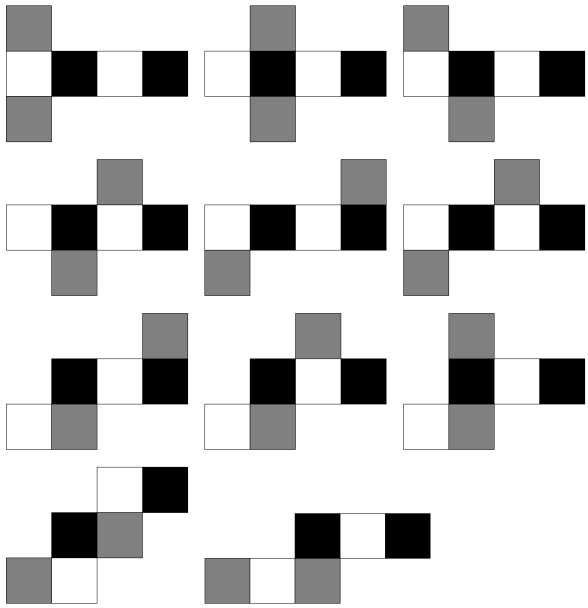
5. Die Aussagen verlangen nochmals ein gründliches Durchdringen des Bauens von Würfelnetzen.

Weiterführendes

Alle Aufgaben können mit anderen Körpern durchgeführt werden.
Mit allen Würfelnetzen kann parkettiert werden, auch Kombinationen sind möglich.

Lösungen

1 **2** **3**



Insgesamt gibt es elf nicht kongruente Netze.
Schwarz, Grau oder Weiss markieren die zusammengehörenden Deck- und Grundflächen.

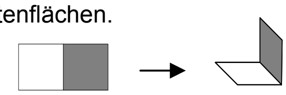
---

4 **A** Es sind verschiedene Lösungen möglich.
Lösungsbeispiel: Vier Quadratflächen dürfen nicht quadratisch angeordnet werden.

B Richtig.

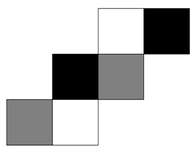
C Falsch, ein Würfel besteht aus sechs gleich grossen quadratischen Seitenflächen.

D Falsch.



E Falsch.

F Falsch.



---

5 **A** 7 Kanten.

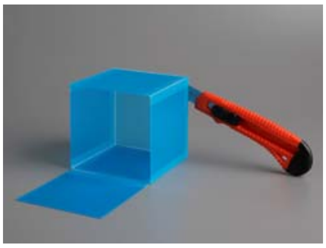
B Verschiedene Tipps sind möglich.

C Verschiedene Tipps sind möglich.

Lernumgebung «Vom Körper zum Netz»

Material
Quadratform 1
Rechteckformen 2, 3, 4
Klebestreifen, festes Papier
Japanmesser

Würfel sind Körper. Sie haben einen Innenraum (Volumen) und eine Hülle (Oberfläche). Die Hülle eines Körpers kann man aufschneiden und flach auf den Tisch legen. Hängen die Quadrate zusammen, nennt man das ein Netz oder eine Abwicklung.



Den Würfel so aufschneiden, dass ein Netz entsteht

1 Würfel aufschneiden

Klebe einen Würfel und schneide ihn so auf, dass ein Netz entsteht.

---

2 Bestimmte Würfelnetze schneiden

A Zeichne einige Würfelnetze.

B Wähle eines der Netze aus und schneide die Kanten des Würfels so auf, dass genau dieses Netz entsteht. Falls du den Würfel an den falschen Kanten aufgeschnitten hast, klebst du die Teile wieder zusammen und probierst es noch einmal.

C Löse Aufgabe B mit anderen Würfelnetzen.

---

3 Teamwork (2 – 4 Personen)

Vor euch liegt ein Würfel. Die erste Person schneidet eine Kante auf und gibt den Würfel weiter. Die nächste Person schneidet eine weitere Kante auf und gibt den Würfel weiter.
Schafft ihr es gemeinsam, den Würfel zu einem Netz aufzuschneiden?
Besonders spannend wird es, wenn man aufs Sprechen und Zeigen verzichtet.

---

4 Quadernetze

Stelle einen Quader mit den Rechteckformen her.

A Schneide ihn zu einem Netz auf und zeichne dieses Netz.

B Zeichne unterschiedliche Netze dieses Quaders auf.

C Wie viele unterschiedliche Netze gibt es? Beschreibe und begründe.

D Bilde andere Quader und gehe wie bei Aufgabe A – C vor.

E Der Quader soll drei unterschiedliche Flächen haben. Baue einen solchen. Du kannst dazu Formen verwenden und mit Papierflächen ergänzen. Skizziere die Quader und schreibe die Masse dazu.

F Nicht alle Quader haben die gleiche Anzahl Netze. Untersuche, beschreibe und begründe.

---

5 Gib einen Tipp

A Wie viele Kanten muss man beim Würfel, beim Quader aufschneiden, so dass ein Netz entsteht? Begründe.

B Worauf muss man achten, wenn mit Rechteckflächen ein Quader gebaut wird?

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum CH-Zahlenbuch/mathbu.ch		
V	Sich ebene und räumliche Figuren vorstellen	– Sich Körper als Netze vorstellen	Zahlenbuch 6	S. 72	Rauminhalt
V	Sich Zusammenhänge und Veränderungen vorstellen	– Würfel und Quadernetze untersuchen	mathbu.ch 7	LU 13	Kopfgeometrie
M	Argumentieren, begründen und widerlegen				
P	Protokollieren, dokumentieren				

Zur Sache

Die Vorstellung vom Raum zur Ebene ist eine wichtige Voraussetzung, um zum Beispiel Pläne oder Anleitungen zu lesen. An Würfeln und Quadern wird das Hin und Zurück vom Raum zur Ebene geübt. Körper werden aufgeschnitten und als Netze flachgelegt.

Voraussetzungen

Begriffe: Würfel, Quader, kongruent.

Zum Unterricht

Diese Lernumgebung ist eng verknüpft mit der Lernumgebung vom Netz zum Würfel. Es wäre möglich, in einer ersten Phase «Vom Netz zum Würfel» zu bearbeiten. Später könnten die vorliegenden Aufgaben als Repetition und als Weiterführung anschliessen. Beide Lernumgebungen beschäftigen sich nur mit rechtwinkligen Körpern.

1 2 Würfel werden zu Netzen aufgeschnitten. Hier wird bereits ein Abstraktionsschritt verlangt. Wer sich intensiver mit Würfelnetzen beschäftigt hat, wird diese Aufgaben leichter lösen.

3 Im Team aufschneiden bedeutet, man muss das eigene Denkkonzept immer wieder weglegen, muss beweglich die neue Situation aufnehmen und weiterdenken. Anspruchsvoller wird's, wenn aufs Kommunizieren vollständig verzichtet wird.

4 Quadrate sind Spezialfälle von Rechtecken und gehören auch zur Auswahl.
Rechteckformen inkl. Quadratformen werden zu Quadern zusammengeklebt. Die Schülerinnen und Schüler gehen wie bei den vorangehenden Aufgaben vor. Sie zeichnen die entsprechenden Netze auf. Die Frage nach allen Quadernetzen ist anspruchsvoll und abstrakt. Nach anfänglichem Experimentieren müssen sich die Schülerinnen und Schüler vom Material lösen und systematisch vorgehen.
Mit den vorgegebenen Flächen können nur Quader mit zwei unterschiedlichen Flächenformen gebaut werden. Will man einen Quader mit drei verschiedenen Flächen bauen, müssen mindestens zwei Flächen mit Papier ergänzt werden.

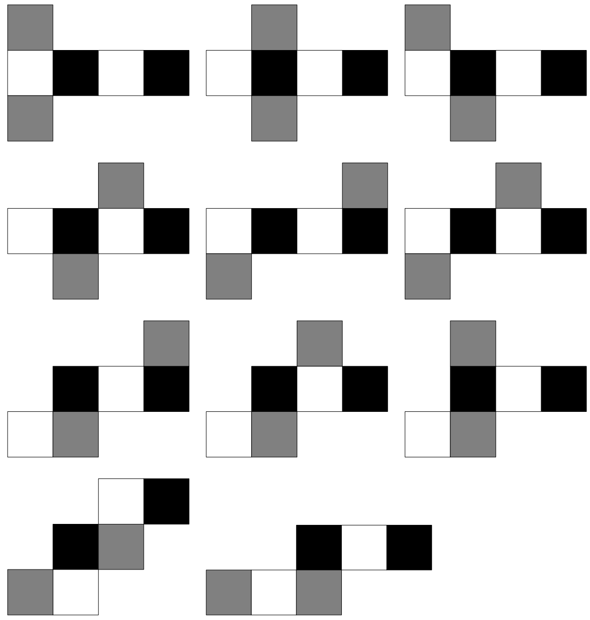
5 Die Schülerinnen und Schüler stellen sich nochmals das Aufschneiden eines Würfels vor.
Sie fassen wesentliche Punkte, wie ein Netz aus Rechteckflächen gebaut wird, in Worten zusammen.

Weiterführendes

Alle diese Fragestellungen könnten auch an Prismen und Pyramiden untersucht werden.

Lösungen

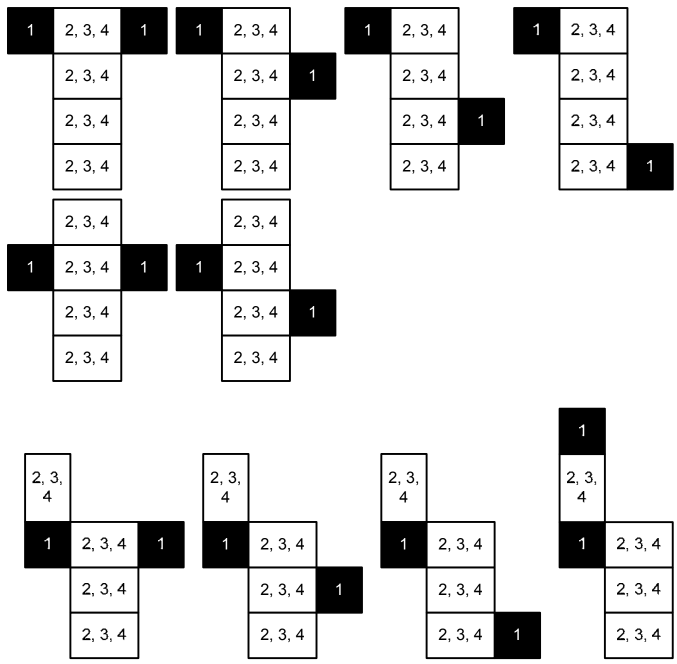
2 **A** Es gibt 11 verschiedene Würfelnetze.



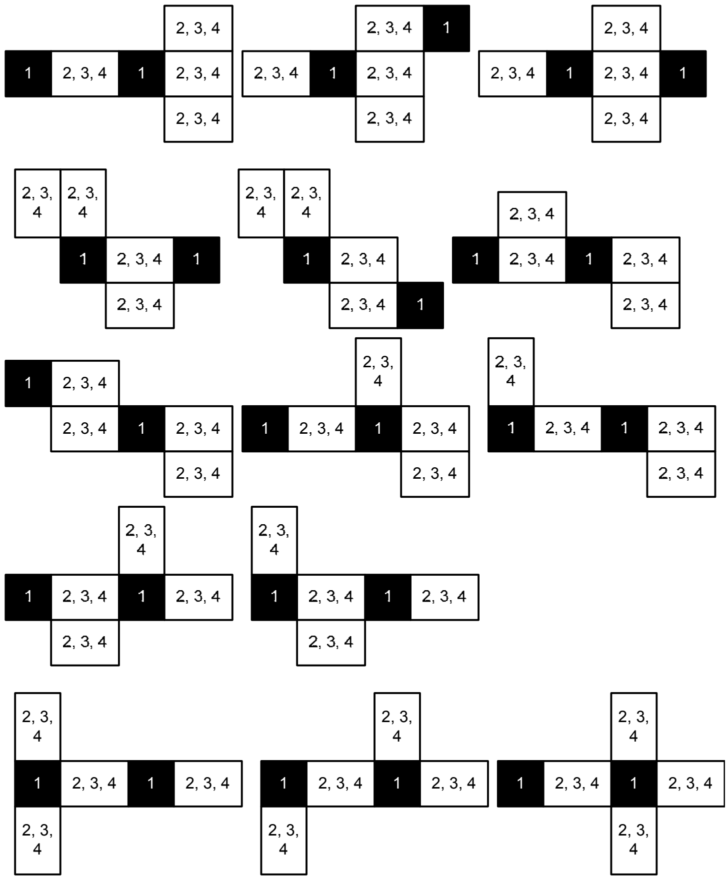
4 **B** Alle Netze sind unten abgebildet.

C Es gibt 24 unterschiedliche Netze.

D Das Quadernetz besteht immer aus zwei Formen 1 und vier Formen 2, 3 oder 4.



Lösungen



E Individuelle Lösungen.

F Würfel: 11 Netze

Quadratisches Prisma: 24 Netze

Ungleichseitiger Quader: 54 Netze

---

5 **A** Die Hülle der beiden Körper besteht aus 6 Flächen. Als Netz aufgeschnitten berühren sich diese Flächen an 5 Seiten. Daraus folgt, dass 7 Kanten aufgeschnitten werden müssen.

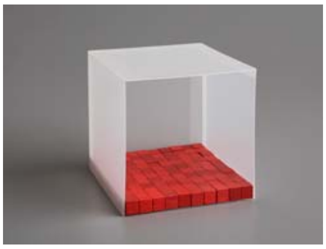
B Individuelle Lösungen, zum Beispiel:

- In den Ecken dürfen sich nicht vier Flächen gegenseitig berühren.
- Deck- und Grundfläche dürfen sich nicht berühren.

Lernumgebung «Berechnungen am Quader»

Material
Quadratform 1
Alle Rechteckformen
Zentimeterwürfel
Kärtchen

Wir berechnen den Rauminhalt, die Oberfläche und die Gesamtkantenlänge von Quadern und Würfeln.



Dezimeterwürfel mit einer Schicht Zentimeterwürfeln

Anzahl Schichten	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Länge [cm]	10	10								
Breite [cm]	10	10								
Höhe [cm]	1	2								
Volumen [cm³]	100	200								
Oberfläche [cm²]	240									
Gesamtkantenlänge [cm]	84									

Tabelle zu den Aufgaben 1A bis C

1 Würfel in Quader unterteilen

Baue das links abgebildete Modell.

A Die kleinen Zentimeterwürfel im Innern des Dezimeterwürfels bilden zusammen einen Quader. Berechne das Volumen, die Oberfläche und die Gesamtkantenlänge dieses Quaders. Notiere die Ergebnisse wie auf der Abbildung links in einer Tabelle.

B Lege eine zweite Schicht mit Zentimeterwürfeln in den Dezimeterwürfel und wiederhole die Berechnungen von Aufgabe 1A.

C Vervollständige die Tabelle.

D Suche in der Tabelle Gesetzmässigkeiten.

Dezimeterwürfel mit schräg eingelegter Fläche

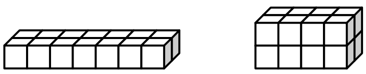
2 Berechnungen an Prismen

A Baue das Modell links nach. Beschreibe die Form der beiden Teilkörper.

B Skizziere die beiden Grundflächen massstabgetreu und berechne ihre Flächeninhalte.

C Vergleiche die Volumen der beiden Teilkörper.

D Berechne den Unterschied der Oberflächen der beiden Teilkörper.



Zwei aus 16 Würfeln gebildete Quader

3 Quader untersuchen

A Baut mit den in der Klasse hergestellten Dezimeterwürfeln einen grossen Quader.

B Ein Quader besteht aus 24 Würfeln. Skizziere verschiedene Möglichkeiten.

C Markiere den Quader mit der grössten und jenen mit der kleinsten Oberfläche. Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Form des Quaders und seiner Oberfläche.

D Markiere den Quader mit der grössten und jenen mit der kleinsten Gesamtkantenlänge. Beschreibe den Zusammenhang zwischen der Form des Quaders und seiner Gesamtkantenlänge.

E Baue aus 16, 17, 32… Würfeln möglichst viele verschiedene Quader. Wovon hängt jeweils die Anzahl der möglichen Quader ab?

F Ein Würfel ist aus kleineren Würfeln zusammengesetzt. Wie viele Würfelchen braucht es?

Zusammengesetzter Körper

4 Berechnungen an zusammengesetzten Körpern

Baue das links abgebildete Modell.

A Wie viele Zentimeterwürfel haben in diesem zusammengesetzten Körper Platz?

B Berechne die Oberfläche des Körpers. Sich berührende Flächen gehören nicht zur Oberfläche.

C Bestimme die Gesamtkantenlänge des Körpers.

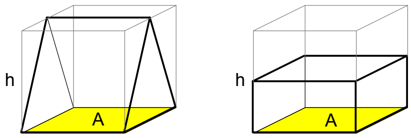
D Stell dir vor, du malst diesen Körper aussen rot an und zerschneidest ihn nachträglich in Zentimeterwürfel. Wie viele Zentimeterwürfel haben 3, 2, 1 oder 0 rote Seitenfläche(n)?

---

5 Berechnungen an Teilkörpern des Würfels

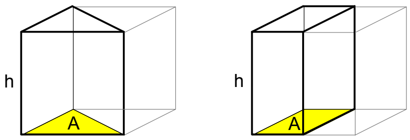
Die gelbe Fläche A ist die Standfläche des Körpers, h die Kantenlänge des Würfels.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe.



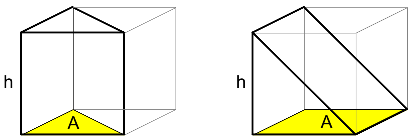
A Das Volumen des linken Körpers ist kleiner als das Volumen des rechten Körpers.

B Das Volumen beider Körper berechnet man aus A · h.



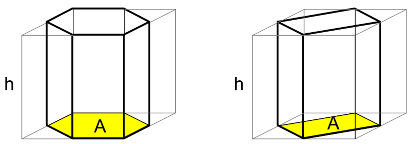
C Die Standfläche des linken Körpers ist kleiner als die Standfläche des rechten Körpers.

D Die Oberfläche des linken Körpers ist grösser als die Oberfläche des rechten Körpers.



E Das Volumen des linken Körpers berechnet man aus A · h, jenes des rechten Körpers aus (A · h) : 2.

F Beide Körper besitzen das gleiche Volumen.



G Das Volumen des linken Körpers ist 1,5-mal so gross wie das Volumen des rechten Körpers.

H Die Mantelfläche des linken Körpers ist kleiner als die Mantelfläche des rechten Körpers.

---

6 Eigene Aufgaben entwerfen

Entwirf eigene Aufgaben wie unter Aufgabe 5. Notiere sie auf ein Kärtchen und gib sie deinen Mitschülerinnen und Mitschülern zum Lösen.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum CH-Zahlenbuch/mathbu.ch		
V	Sich Grössen vorstellen	– Zusammenhänge zwischen Längen, Flächen und Volumen sehen	Zahlenbuch 6	S. 72	Rauminhalte
V	Sich räumliche Figuren vorstellen		mathbu.ch 7	LU 14	Mit Würfeln Quader bauen
K	Begriffe verstehen und gebrauchen	– Oberflächen und Volumen von Quadern berechnen	mathbu.ch 8	LU 23	Grundfläche mal Höhe
K	Zeichnen und skizzieren	– Flächen- und Raummasse kennen	mathbu.ch 8	LU 24	Der Altar von Delos

Zur Sache

Aus einer festen Anzahl von Würfeln werden verschiedene Quader gebildet. Von diesen Quadern werden Gesamtkantenlängen und Oberflächen berechnet und miteinander verglichen. Dabei wird ersichtlich, dass zwischen dem Volumen und der Gesamtkantenlänge respektive zwischen dem Volumen und der Körperoberfläche keine Proportionalität besteht.
Durch das Bauen von Quadern aus Einheitswürfeln wird bei den Schülerinnen und Schülern die korrekte Vorstellung für den Volumenbegriff gefördert.

Voraussetzungen

Flächenberechnungen an Rechtecken, Volumenberechnungen an Quadern, einfache Körper im Schrägbild skizzieren.

Zum Unterricht

Die Lernumgebung «Berechnungen am Quader» ist an das Thema Rauminhalte S. 72/73 im Zahlenbuch 6 und an die Lernumgebung 14 im mathbu.ch 7 angelehnt.

1 Bei dieser Aufgabe geht es um die handlungsgestützte Entwicklung des Volumenbegriffs. Gleichzeitig werden die Begriffe Oberfläche und Gesamtkantenlänge repetiert. Erste Vorstellungen zur Beziehung von Form und Volumen, Form und Oberfläche sowie Form und Gesamtkantenlänge eines Quaders werden gebildet.

2 Hier geht es um das Verständnis, dass das Volumen von senkrechten Körpern gleicher Höhe proportional zu deren Grundfläche ist. Bei der Aufgabe 2D wäre für die Berechnung der Trennfläche der Pythagoras nötig. Diese Fläche muss aber zum Lösen der Aufgabe nicht berechnet werden, weil nach dem Unterschied der beiden Oberflächen gefragt wird.

3 Aus einer festen Anzahl von Würfeln können meistens unterschiedliche Quader gebaut werden, je nach Anzahl der Teile. Auch wenn diese Quader dasselbe Volumen besitzen, trifft das nicht für die Gesamtkantenlänge und für die Oberfläche zu. Je mehr sich ein Quader der Würfelform annähert, desto kleiner wird seine Oberfläche.
Zum Anfertigen von Skizzen eignet sich auch Punktpapier.

4 Durch Berechnungen an zusammengesetzten Körpern werden die Lerninhalte der vorgängigen Aufgaben vertieft und gefestigt. Besonders Aufgabe 4B ist recht anspruchsvoll. Was alles zur Oberfläche und zur Gesamtkantenlänge gehört, muss in der Klasse thematisiert werden.

5 6 Diese Aufgabenstellungen eignen sich, um die Schülerinnen und Schüler im Bereich «Erklären und Begründen» zu fördern.

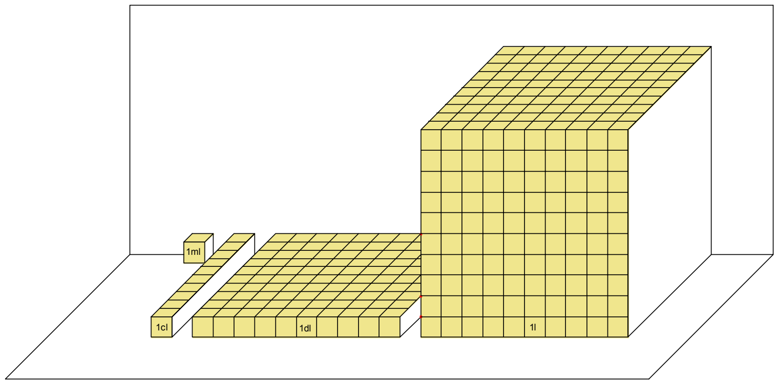
Weiterführendes

In der Lernumgebung 34 im mathbu.ch 7 wird das Thema der Volumenberechnung weitergeführt, indem der Zusammenhang zwischen Raum- und Hohlmassen hergestellt wird.
Das Thema der Oberflächen- und Volumenberechnung wird in den Lernumgebungen 23 und 24 im mathbu.ch 8 erneut aufgegriffen und mit speziellen Körpern erweitert.

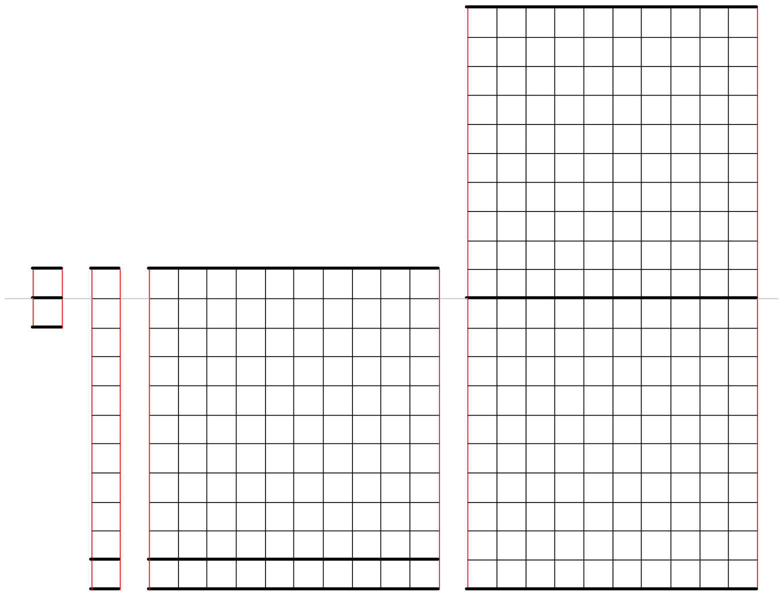
Didaktischer Kommentar

Zur Visualisierung der Hohlmasse 1 ml, 1 cl, 1 dl, 1 l und der Volumen 1 cm^3, 1 dm^3 kann ein von den Schülerinnen und Schülern hergestelltes Faltmodell eingesetzt werden.

Schrägansicht des Modells:



Vorlage (im Anhang befindet sich eine kopierfähige Vorlage):



Herstellung:

1. Vorlage mit geeignetem Vergrösserungsfaktor auf festes Zeichenpapier im A3-Format kopieren, sodass ein Zentimeterraster entsteht.

2. Entlang der senkrechten roten Linien auf einer Schneidunterlage einschneiden.

3. Die dicken Faltlinien sorgfältig vorritzen, so dass sie beim Falten des Modells nicht durchbrechen.

4. Das Modell kann anschliessend in ein A4-Heft geklebt werden, so dass beim Öffnen der Heftseite die vier Volumenteile aufgeklappt werden.

Lösungen

1 A–C

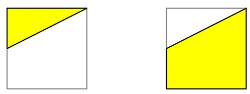
Anzahl Schichten	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Länge (cm)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Breite (cm)	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Höhe (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Volumen (cm^3)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Oberfläche (cm^2)	240	280	320	360	400	440	480	520	560	600
Gesamtkantenlänge (cm)	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120

D Das Volumen vergrössert sich von Schicht zu Schicht um 100 cm^3.
Die Oberfläche wird von Schicht zu Schicht um 40 cm^2 grösser.
Die Gesamtkantenlänge wird von Schicht zu Schicht um 4 cm grösser.

---

2 A Es entstehen zwei senkrechte Prismen, das kleinere mit einer dreieckigen Grundfläche, das grössere mit einer trapezförmigen Grundfläche.

B Die Grundfläche des kleineren Prismas bildet ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Flächeninhalt ¼ der Quadratfläche entspricht.
Die Grundfläche des grösseren Prismas bildet ein Trapez, dessen Flächeninhalt ¾ der Quadratfläche entspricht.



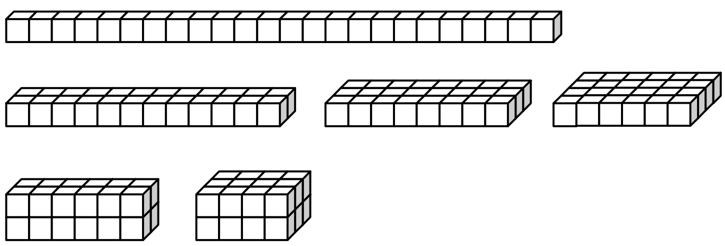
C Das Volumen des kleineren Prismas beträgt ¼ dm^3, jenes des grösseren Prismas ¾ dm^3.

D 2 dm^2

---

3 A Ist die Anzahl Dezimeterwürfel keine Primzahl, so können damit unterschiedliche Quader gebaut werden.

B Quader aus 24 Würfeln



Es spielt keine Rolle, ob die oben gezeichneten Quader in einer anderen Lage gezeichnet werden. Es entstehen dadurch keine weiteren Lösungen.

C

1 x 1 x 24 Würfel	O = 98 cm^2	grösste Oberfläche
1 x 2 x 12 Würfel	O = 76 cm^2	
1 x 3 x 8 Würfel	O = 70 cm^2	
1 x 4 x 6 Würfel	O = 68 cm^2	
2 x 2 x 6 Würfel	O = 56 cm^2	
2 x 3 x 4 Würfel	O = 52 cm^2	kleinste Oberfläche

Je kompakter die Form des Quaders ist, desto kleiner ist seine Oberfläche.

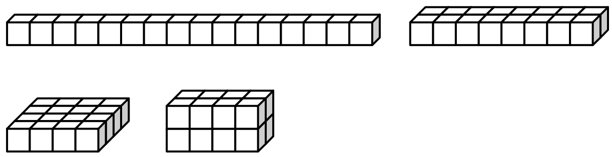
Lösungen

D

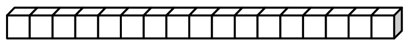
1 x 1 x 24 Würfel	= 104 cm	grösste Gesamtkantenlänge
1 x 2 x 12 Würfel	= 60 cm	
1 x 3 x 8 Würfel	= 48 cm	
1 x 4 x 6 Würfel	= 44 cm	
2 x 2 x 6 Würfel	= 40 cm	
2 x 3 x 4 Würfel	= 36 cm	kleinste Gesamtkantenlänge

Je kompakter die Form des Quaders ist, desto kleiner ist seine Gesamtkantenlänge.

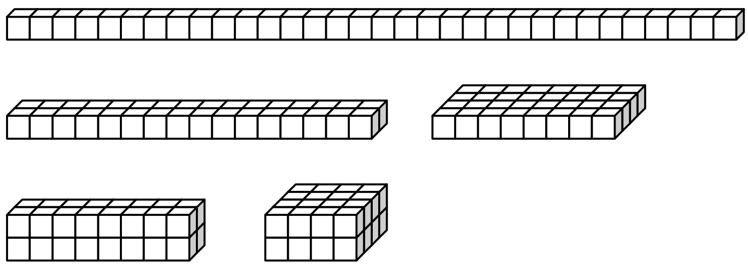
E Quader aus 16 Würfeln



Quader aus 17 Würfeln



Quader aus 32 Würfeln



Ist die Anzahl Dezimeterwürfel keine Primzahl, so können damit unterschiedliche Quader gebaut werden, je nachdem, wie viele Möglichkeiten es gibt, ist diese Zahl in drei Faktoren zu zerlegen.

F Es muss eine Kubikzahl sein.
Beispiele: 8, 27, 64, 125…

---

4 **A** 1500 St., d.h. $V = 1500\ cm^3$

B

3 rote Seitenflächen haben	10 Würfel
2 rote Seitenflächen haben	140 Würfel
1 rote Seitenfläche haben	590 Würfel
0 rote Seitenflächen haben	760 Würfel
Total sind es	1500 Würfel

C $9\ dm^2$

D 18 dm

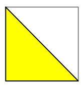
Lösungen

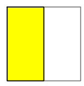
5 **A** Falsche Aussage. Beide Teilkörper besitzen ein Volumen, das der Hälfte des Würfelvolumens entspricht.

B Falsche Aussage. Die Volumen der beiden Körper sind je halb so gross wie das Volumen des Würfels.

C Falsche Aussage. Beide Standflächen sind gleich gross, nämlich je halb so gross wie eine Seitenfläche des Würfels.

D Wahre Aussage. Stand- und Deckfläche sind bei beiden Körpern gleich gross. Somit müssen lediglich die Mantelflächen miteinander verglichen werden. Die Mantelfläche des linken Teilkörpers ist grösser als der Flächeninhalt von drei Quadratflächen und kleiner als der Flächeninhalt von vier Quadratflächen; jene des rechten Teilkörpers ist gleich gross wie der Flächeninhalt von drei Quadratflächen. Das sieht man, wenn man die Seitenlängen der beiden Standflächen miteinander vergleicht.


Standfläche des linken Teilkörpers

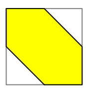

Standfläche des rechten Teilkörpers

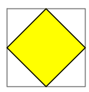
E Wahre Aussage. Der rechte Teilkörper läuft oben in eine Kante aus. Sein Volumen ist somit halb so gross wie das Volumen des Würfels.

F Wahre Aussage. Beide Teilkörper stellen einen diagonal halbierten Würfel dar. Ihr Volumen ist demzufolge je halb so gross wie das Volumen des ganzen Würfels.

G Wahre Aussage. Weil beide Teilkörper gleich hoch sind, hängt deren Volumen lediglich von der Standfläche der beiden Teilkörper ab. Beim linken Teilkörper entspricht die Standfläche ¾ der Quadratfläche, beim rechten ½ der Quadratfläche; ¾ ist anderthalb mal so gross wie ½.

H Falsche Aussage. Weil beide Mantelflächen die gleiche Höhe haben, kommt es lediglich auf den Umfang der Standfläche an. Dieser ist beim linken Teilkörper grösser als beim rechten Teilkörper. Somit ist die Mantelfläche des linken Teilkörpers grösser als die Mantelfläche des rechten Teilkörpers.

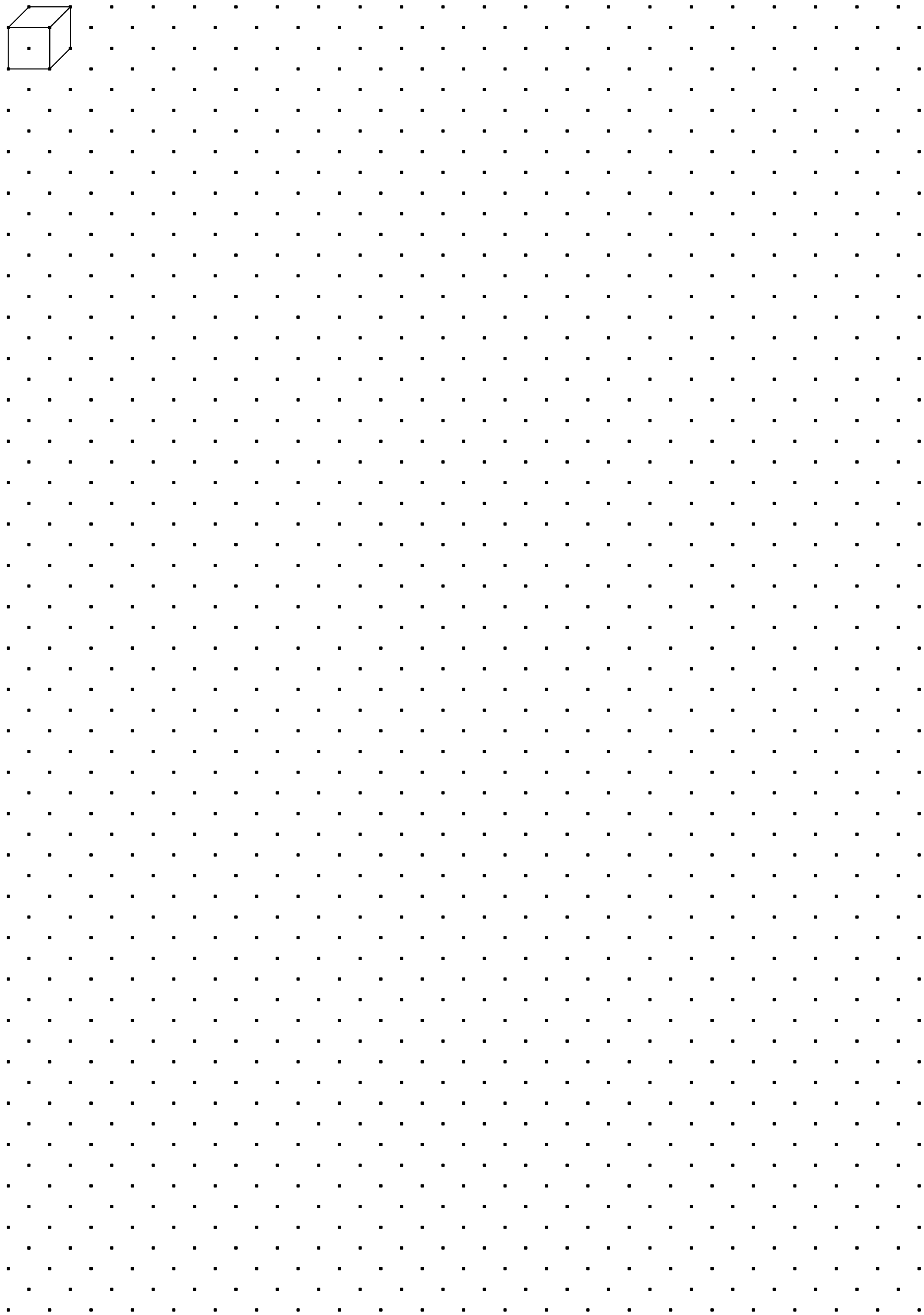

Grundfläche des linken Teilkörpers


Grundfläche des rechten Teilkörpers

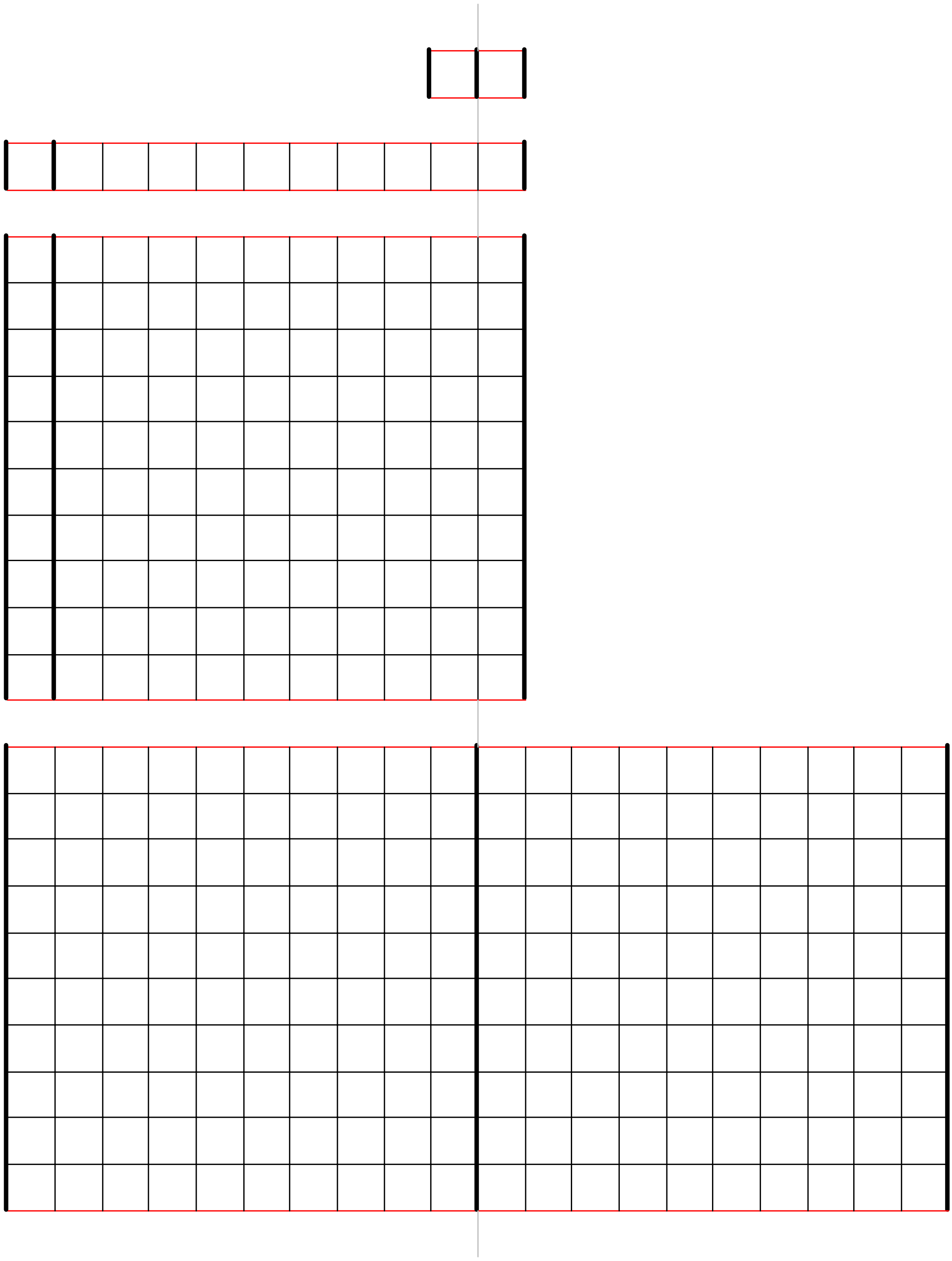
---

6 Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

Punktpapier 45°, diagonaler Verkürzungsfaktor 0.7



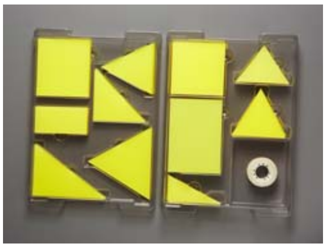
Kopiervorlage Hohlmasse



Lernumgebung «Satz des Pythagoras»

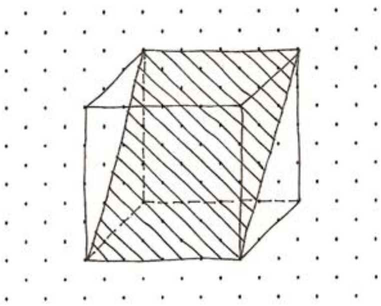
Material
Alle Formen
cm-Raster
Punktpapier

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras lassen sich bei rechtwinkligen Dreiecken die Seitenlängen berechnen.


Formen in der Schachtel

1 Längen berechnen

A Berechne bei allen Formen den Umfang.
B Überprüfe deine Berechnungen durch Messen.
C Bei welchen Formen brauchst du den Satz von Pythagoras? Zähle auf und begründe.


Schrägbild einer Form im Würfel

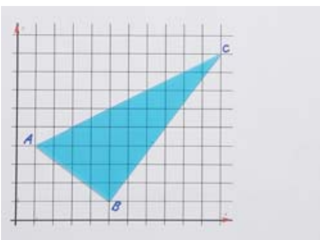
2 Formen untersuchen, Fläche berechnen

A Stelle bzw. lege jede Form einzeln in einen Dezimeterwürfel.
B Skizziere die Formen im Würfel wie im Beispiel links abgebildet.
C Markiere Diagonalen von Seitenflächen und Raumdiagonalen.
D Berechne bei allen Formen den Flächeninhalt.
E Überprüfe deine Berechnungen durch Messen von benötigten Längen.
F Bei welchen Formen brauchst du zur Flächenberechnung den Satz von Pythagoras? Zähle auf und begründe.


Verschiedene Pyramiden bauen

3 Volumen berechnen

A Baue verschiedene Pyramiden.
B Zeichne die Schrägbilder mit den Längenangaben.
C Berechne das Volumen.



Dreieck im Koordinatensystem

4 Dreiecke im Koordinatensystem

A In der Abbildung links ist eine Dreieckform 10 in ein Koordinatensystem gelegt. Bestimme die Koordinaten der Eckpunkte A, B und C.
B Die Eckpunkte einer anderen Dreieckform haben die Koordinaten (1/11), (6/1) und (12/9). Finde diese Form.
C Finde weitere Formen, die im Koordinatensystem ganzzahlige Eckpunktkoordinaten haben können. Zähle auf und skizziere.

5 Längen aus Koordinaten berechnen

A Bei Aufgabe 4A wurde eine Dreieckform ins Koordinatensystem gelegt. Skizziere und beschreibe, wie man die Seitenlängen aus den Koordinaten der Eckpunkte berechnen kann.

B Berechne den Umfang des Dreiecks mit den Eckpunktkoordinaten (2/3), (11/1,) und (7/11).

C Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

Gib einen Tipp

6 Erkläre jemandem, der noch nie etwas vom Satz des Pythagoras gehört hat, was dieser bedeutet. Skizziere und beschreibe.

---

7 Wahr oder falsch?

Welche der Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründe deine Antworten.

A Der Satz von Pythagoras gilt für alle Dreiecke.

B Sind bei einem Rechteck die Seitenlängen bekannt, lässt sich die Länge der Diagonalen berechnen.

C Ist bei einem Quadrat die Seitenlänge bekannt, lässt sich die Länge der Diagonalen berechnen.

D Sind bei einem Rechteck die Diagonalenlängen bekannt, lässt sich die Länge der Seiten berechnen.

E Ist bei einem Quadrat die Diagonalenlänge bekannt, lässt sich die Länge der Seite berechnen.

F Sind bei einem Rhombus die Diagonalenlängen bekannt, lässt sich die Länge der Seiten berechnen.

Weitere Aussagen

8 Formuliere weitere Aussagen und lasse sie von deiner Lernpartnerin, deinem Lernpartner überprüfen.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum mathbu.ch		
V	Geometrisches (Raum-) Vorstellungsvermögen schulen	– Vorgegebene geometrische Situationen nachbauen	mathbu.ch 8	LU 13	Der Satz des Pythagoras
K	Den Satz von Pythagoras kennen	– Berechnungen mit Hilfe des Satzes von Pythagoras durchführen	mathbu.ch 9	LU 6	Pyramiden
M	Den Satz von Pythagoras anwenden				
P	Situationen nachvollziehen				

Zur Sache

Der bereits erarbeitete Satz von Pythagoras wird an konkreten Objekten angewendet.

Voraussetzungen

Begriffe am rechtwinkligen Dreieck; Satz des Pythagoras; Koordinatensystem; Pyramidenvolumen (bei Aufgabe 3).

Zum Unterricht

Die Lernumgebung «Satz des Pythagoras» ist an die Lernumgebung 13 im mathbu.ch 8 angelehnt.
Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras werden Längen, Flächen und Volumen berechnet. Berechnungen können durch Messen überprüft werden.
Durch das Nachbauen des Würfels werden sowohl die Diagonale der Seitenfläche wie auch die Körperdiagonale anschaulich; das Raumvorstellungsvermögen wird geschärft.

1 2 Die Ansicht «Formen im Würfel» kann zur Verfügung gestellt werden (s. Kopiervorlagen). Die Berechnungen an den Formen können durch Nachmessen überprüft werden.

3 Es können auch nur die Höhen der Pyramiden berechnet werden, wenn das Volumen noch nicht behandelt wurde (s. Lernumgebung «Pyramiden»).

4 Formen werden ins Koordinatensystem gelegt und die Eckpunktkoordinaten bestimmt.

5 Die Seitenlängen lassen sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und der Eckpunktkoordinaten berechnen.
Der Flächeninhalt lässt sich aus dem Koordinatensystem ablesen, indem das Dreieck in ein Rechteck gestellt wird.

6 Die Lernenden finden eigene Formulierungen.

7 8 Aussagen überprüfen: Die Schülerinnen und Schüler werden im Bereich «Erklären und Begründen» gefördert.

Weiterführendes

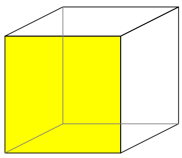
Mit den Formen 1, 2, 3 und 4 verschiedene Quader bauen und die Körperdiagonalen berechnen.
Berechnungen im dreidimensionalen Koordinatensystem.

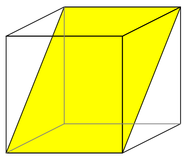
Lösungen

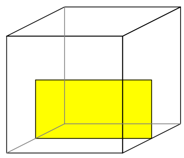
1 2

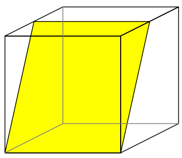
Form	Umfang cm	Flächeninhalt cm^2
1	40	100
2	48.3	141.4
3	30	50
4	42.4	111.8
5	30	43.3
6	34.1	50
7	32.4	50
8	41.5	70.7
9	27.3	35.4
10	26.2	25
11	42.4	86.6

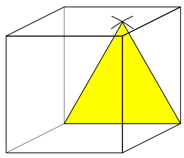
2 **B** z.B.

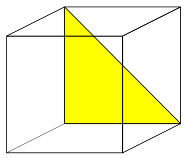

Form 1

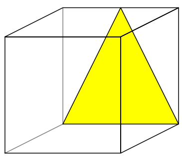

Form 2

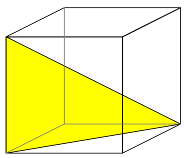

Form 3

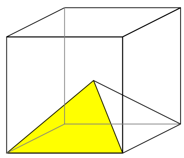

Form 4

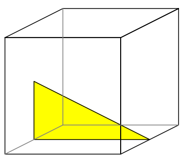

Form 5

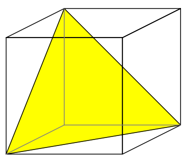

Form 6


Form 7


Form 8


Form 9


Form 10


Form 11

3 Verschiedene Lösungen möglich.

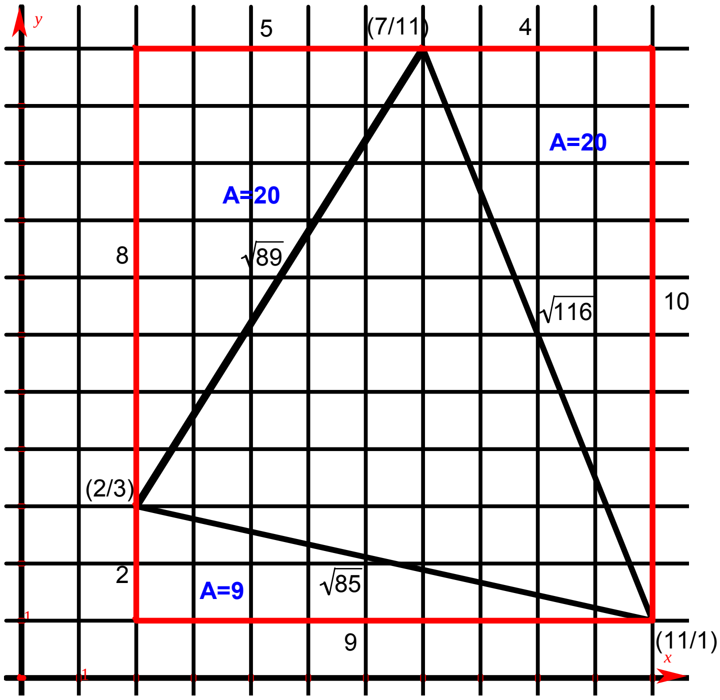
4 **A** A(1/4), B(5/1), C(11/9)

B Form 7

C Die Formen 1, 3, 6 und 10.

Lösungen

5 **A, B** Die Seitenlängen lassen sich aus den rechtwinkligen Dreiecken berechnen; die Seitenlängen der Katheten entsprechen den Differenzen der jeweiligen Eckpunktkoordinaten.



u = 29.4

C Der Flächeninhalt entspricht der Differenz zwischen der Rechteckfläche und den drei rechtwinkligen Dreiecken. A = 41

---

6 Schülerlösungen:

Stell dir ein rechtwinkliges Dreieck vor. Die zwei Seiten, die den rechten Winkel bilden, nennt man „Kathete" und die dritte „Hypotenuse". Die kürzere Kathete beschriftet man mit a und die längere mit b. Die Hypotenuse wird c. Jetzt bilden wir bei der Seite a, b und c ein Quadrat (a^2, b^2, c^2). Wenn wir nun $a^2 + b^2$ rechnen, erhalten wir c^2. Das ist der Satz des Pythagoras. $a^2 + b^2 = c^2$.

Damit man bei einem rechtwinkligen Dreieck die längste Seite herausfindet, muss man je die zwei Kürzeren mit sich selber multiplizieren und dann addieren. Dies gibt dann die Fläche der längsten Seite. Nun muss man die Wurzel dieser Fläche ziehen, so hat man die Länge der Seite. $a^2 + b^2 = c^2$

---

7 Aussagen A und D sind falsch.

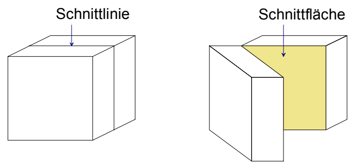
---

8 Individuelle Lösungen.

Lernumgebung «Würfelschnitte»

Material
Alle Formen
Sand, Klebstreifen
Gummibänder
Festes farbiges Papier, Filzstift
Alkohol zum Reinigen

Beim Zerschneiden eines Würfels entstehen Schnittlinien und Schnittflächen.
Wir untersuchen hier nur ebene Schnitte, also keine gewölbten Schnittflächen.



1 Schnittflächen im Würfel mit Sand nachbilden


Würfel mit Sand gefüllt, Schnittflächen und Schnittlinien sichtbar

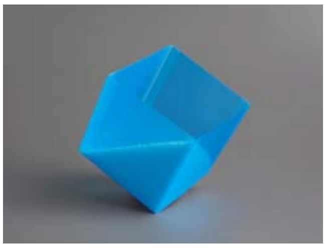
Schnittflächen kann man mit Sand formen. Du siehst auf der Aussenseite des Würfels die Schnittlinien.
Baue einen Würfel ohne Deckfläche und schütte Sand hinein.

A Bewege den Würfel mit Sand, so dass der Sand eine Dreieckfläche bildet. Dies ist eine Schnittfläche.

B Experimentiert und bildet möglichst viele verschiedene Schnittflächen.

C Sucht eine geeignete Form, eure Ergebnisse aufzuzeichnen. Zeichnet sie auf und tauscht aus.

2 Vielecke als Schnittflächen


Schnittlinien: Ansicht von aussen

A Auf dem Bild links sind Schnittlinien eingezeichnet. Wenn man entlang dieser Schnittlinien schneidet, entsteht als Schnittfläche ein gleichseitiges Dreieck**.** Stelle diese Schnittfläche her und überprüfe sie, indem du sie ins Würfelmodell stellst.

B Untersuche weitere Dreiecke. Welche können eine Schnittfläche des Würfels links sein? Skizziere die Flächen.

C Diskutiert eure Ergebnisse zu zweit. Überprüft, indem ihr die Fläche ausschneidet und in den Würfel stellt.

D Stellt nicht dreieckige Schnittflächen her.

E Tauscht eure Ergebnisse aus.

F Welche vorliegenden Formen sind Schnittflächen des Dezimeterwürfels?

3 Kärtchenaufgabe


Schnittfläche im Würfel


Schnittlinien auf dem Würfel

A Zeichne eine Schnittfläche des Würfels auf ein Kärtchen und zeichne auf der Rückseite das Schrägbild mit den entsprechenden Schnittlinien.

B Zeichne weitere solche Kärtchen.

C Überprüft die Kärtchen gegenseitig. Wenn ihr unsicher seid, stellt ihr die Fläche her und überprüft am Modell.

D Tauscht die Kärtchen aus.

4 Kärtchenaufgabe mit Gummiband lösen

Bilde zu der Schnittfläche mit Gummiband die Schnittlinien am Würfelmodell.

5 Würfel mit einem geraden Schnitt in zwei gleich grosse Teile schneiden

A Halbiere den Würfel in Gedanken. Zeichne die Schnittlinien am Modell oder markiere sie mit einem Gummiband.

B Zeichne das Schrägbild.

C Zeichne die Schnittfläche in Originalgrösse und lege sie zur Überprüfung in den Würfel.

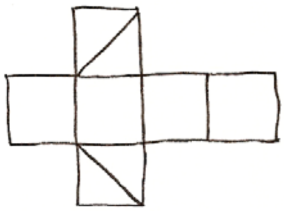
D Suche weitere mögliche Würfelhalbierungen. Gehe wie bei Aufgaben A–C vor.

E Tauscht die Ergebnisse aus und überprüft gegenseitig eure Lösungen.

F Dreieck, Quadrat, Rechteck, Rhombus, Parallelogramm, Fünfeck, Sechseck, Achteck. Welche Schnittflächen sind möglich? Begründe.

G Stellt im Team eine Sammlung von Würfeln mit den entsprechenden Schnittlinien und den gezeichneten Schnittflächen auf.

H Ergänzt eure Kärtchenaufgaben mit neu gefundenen Schnittflächen.



6 Schnittlinienpuzzle

Arbeitet in Gruppen. Klebt ein Würfelnetz mit Quadratformen.

A Wählt eine Würfelhalbierung aus Aufgabe 5 und zeichnet die entsprechenden Schnittlinien auf das geklebte Netz ein.

B Zerlegt das Netz in die Quadrate und legt damit ein neues Netz so, dass die Schnittlinien immer noch korrekt die Schnittfläche bezeichnen.

7 Parallelen in Schnittflächen

Welche Schnittflächen des Würfels haben parallele Seiten?
Welche Schnittflächen haben keine parallelen Seiten? Warum?
Untersucht diese Fragestellungen. Zeichnet, beschreibt und begründet.

8 Würfelmittelpunkt

Stell dir den Würfel mit den Raumdiagonalen vor.
Die Raumdiagonalen schneiden sich in einem Punkt Z.
Aussage 1: Alle ebenen Schnittflächen, die den Würfel halbieren, führen durch den Punkt Z. Stimmt diese Behauptung?
Aussage 2: Alle ebenen Schnittflächen, die durch den Punkt Z gehen, halbieren den Würfel.

A Wie viele Raumdiagonalen gibt es?

B Stell dir die Schnittflächen vor, die den Würfel halbieren.
Liegt der Punkt Z auch auf der Schnittfläche? Wo genau?

C Stimmen die Aussagen? Erkläre in einem kurzen Bericht.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum mathbu.ch		
V	Sich ebene/räumliche Figuren vorstellen	– Würfelschnittflächen herstellen, vorstellen	mathbu.ch 8	LU 5	Kopfgeometrie
V	Sich in der Ebene und im Raum orientieren	– Schnittlinien am Modell zeichnen	mathbu.ch 9	LU 17	Körperschule
K	Begriffe verstehen und gebrauchen	– Von den Schnittlinien ausgehend sich die Schnittfläche vorstellen und umgekehrt	mathbu.ch 9+	LU 19	Körperschule
K	Zeichnen, skizzieren				
M	Argumentieren, begründen widerlegen				

Zur Sache

Anhand des Würfelmodells werden ebene Schnittflächen dargestellt, nachgebaut und überprüft. Sich in einen Körper hineindenken und Körperzerlegungen gedanklich vollziehen, sind anspruchsvolle Vorstellungsaufgaben. Solche Vorstellungen sind jedoch eine wichtige Voraussetzung, Eigenschaften und Strukturen von Körpern zu erfassen.

Voraussetzungen

Erfahrungen mit Körperschnitten, Begriffe und Berechnung von Flächen, Begriff Raumdiagonale.
Vor dieser Lernumgebung muss eine erste Auseinandersetzung mit Würfelschnitten, dem Schneiden am Objekt (zum Beispiel an Sagexwürfeln oder als Kartoffelstempel), erfolgt sein. Die Handlung des Schneidens müssen die Schülerinnen und Schüler bereits erlebt haben.

Zum Unterricht

In dieser Lernumgebung ist ein weiterer Abstraktionsschritt gefordert. Hier geht es um Formen von Schnittflächen und ihre Spuren auf dem Modell, den Schnittlinien.
An Würfelmodellen werden mögliche Schnittflächen mit Sand gebildet. Anhand der Schnittlinien werden Schnittflächen aus Papier hergestellt und am Objekt geprüft. Die Schülerinnen und Schüler setzen sich aktiv auseinander mit der Form der Schnittflächen und dem Schrägbild mit den Schnittlinien.

1 Körpermodelle mit Sand, Salz oder mit einem anderen feinkörnigen Material kombiniert, bieten ein reichhaltiges Experimentierfeld. Die Schülerinnen und Schüler füllen in ein Würfelmodell Sand. Durch Drehen des Modells breitet sich der Sand immer wieder anders aus und formt eine ebene Fläche im Würfel. Diese entspricht einer Schnittfläche. Wird das Modell gefüllt mit Sand von aussen betrachtet, sind die entsprechenden Schnittlinien sichtbar.
In dieser Aufgabe steht das Experimentieren im Vordergrund. Die Schülerinnen und Schüler werden aufgefordert, ihre Ergebnisse in geeigneter Form aufzuzeichnen. Dies können sehr unterschiedliche Darstellungsweisen (Pläne) sein. Bei einer Vielfalt verschiedener Darstellungsformen ist dazu ein Klassengespräch interessant. (Formen gegenseitig erklären, diskutieren, die gut lesbar, verständlich sind...)

2 Hier beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit der Vorstellung, wie von der Schnittlinie auf die Schnittfläche geschlossen werden kann. Die Schülerinnen und Schüler stellen sich anhand der Schnittlinien Schnittflächen vor und stellen diese aus Papier her. Sie überprüfen, indem sie diese ins Würfelmodell stellen.
Schnittlinien lassen sich mit Bleistift (mit Gummi radierbar) oder mit wasserfestem Filzstift (mit Brennsprit zu reinigen) auf die Formen zeichnen. Ebenso können Schnittlinien mit einfachen «Haushaltgummelis» am Objekt gespannt werden. Die «Gummeli» rutschen in die kürzeste Verbindung; dies sind die Schnittlinien.

3 4 Die Vorstellung von der Schnittfläche zu den Schnittlinien im Schrägbild und die umgekehrte Überlegung werden geschult.

5 Es genügt jetzt nicht mehr, sich eine Schnittfläche vorzustellen. Sie muss jetzt so gelegt werden, dass sie den Würfel in zwei Hälften teilt.

6 Das Netz mit den Schnittlinien wird auf die Quadratformen gezeichnet. Anschliessend wird das Netz in die einzelnen Quadrate zerlegt.
Nun müssen die Schülerinnen und Schüler mit diesen Quadraten wiederum ein Netz legen, so dass die Schnittlinien korrekt sind.

7 Eine zentrale Einsicht: Wenn der Schnitt durch den Raumschwerpunkt führt, wird der Würfel halbiert.

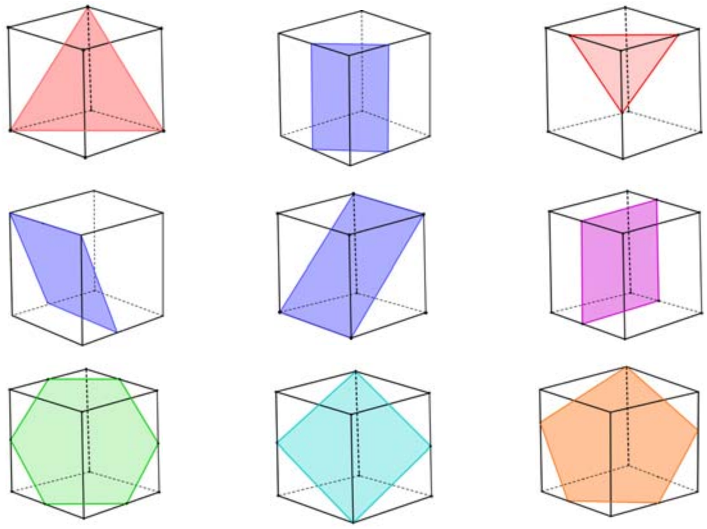
8 Bei dieser Aufgabe geht es um das Überprüfen von Aussagen in Bezug zu dem Würfelmittelpunkt.

Weiterführendes

Die Überlegungen zu Würfelschnitten können auf diese Weise auch an weiteren Körperformen gemacht werden.

Lösungen

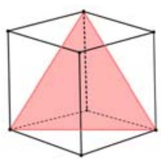
1 **A, B** Beispiele der Lösungen:



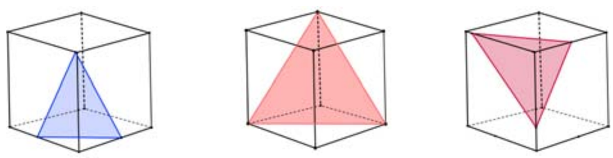
C Individuelle Lösungen.

---

2 **A** Die Schnittflächen sollen aus Papier ausgeschnitten werden, so dass sie ins Würfelmodell gestellt werden können. Siehe das untere Bild.



B Nur spitzwinklige Dreiecke können eine Schnittfläche des Würfels sein.
Beispiele:



gleichschenkliges Dreieck gleichseitiges Dreieck unregelmässiges Dreieck

C Individuelle Lösungen.

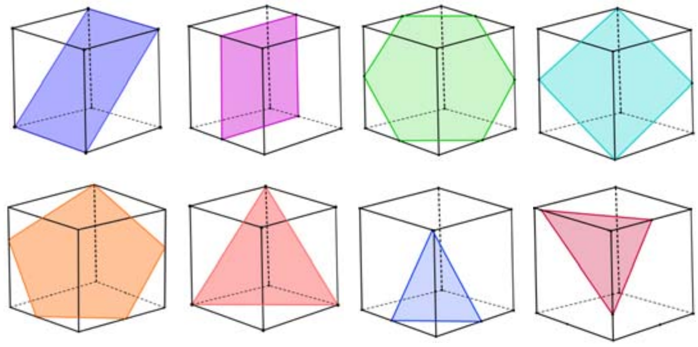
D Vergleiche mit den Lösungen von Aufgabe 1B.

E Individuelle Lösungen.

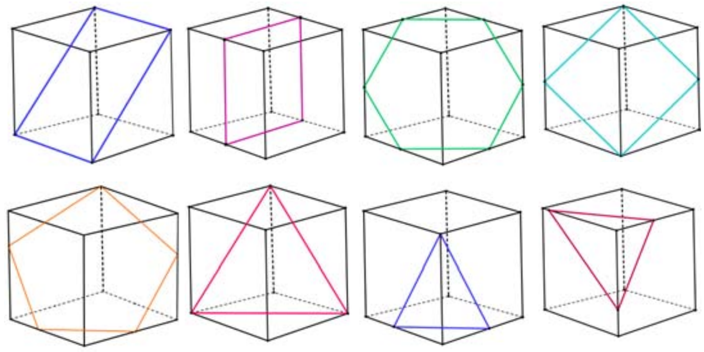
F Vergleiche mit den Lösungen von Aufgabe 1B.

Lösungen

3 **A** Beispiele von Schnittflächen:



Die Schrägbilder mit den entsprechenden Schnittlinien:



B Individuelle Lösungen.

C Individuelle Lösungen.

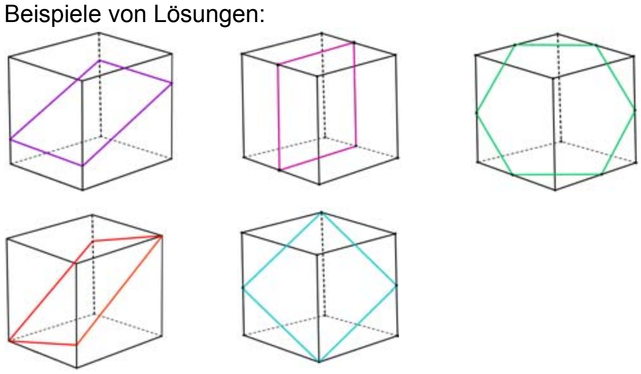
D Individuelle Lösungen.

---

4 Vergleiche mit den Lösungen von Aufgabe 3A.

---

5 **A, B** Beispiele von Lösungen:



Lösungen

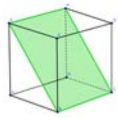
C Vergleiche mit den Lösungen von Aufgabe 2A.

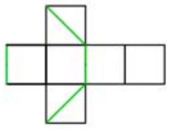
D, E Individuelle Lösungen.

F Mögliche Schnittflächen sind: Quadrate, Rechtecke, Rhomben, Parallelogramme und regelmässige Sechsecke.

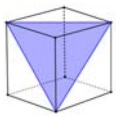
---

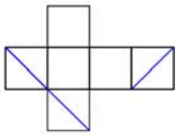
6 **A** 1. Beispiel:





2. Beispiel:



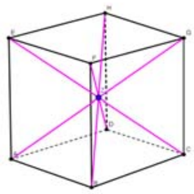


---

7 Schnittflächen in der Form eines Vierecks und Fünfecks haben zwei Parallelenpaare; das Sechseck hat drei Parallelenpaare.

Wenn der Schnitt durch gegenüberliegende Seiten erfolgt, entsteht in der Schnittfläche ein Parallelenpaar, denn die Würfelflächen stehen parallel zueinander.

8



A Es gibt vier Raumdiagonalen in einem Würfel.

B Der Punkt Z ist der Schwerpunkt dieser Schnittfläche. Er liegt in der Mitte dieser Schnittfläche.

C Ja. Begründung: Damit der Würfel halbiert wird, muss die entsprechende Schnittfläche durch den Schwerpunkt des Würfels verlaufen.

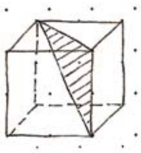
D Individuelle Lösungen.

Lernumgebung «Flächen im Würfel»

Material
Quadrat 1 und
weitere Formen
Punktpapier
Kärtchen mit Punktraster

Von einem Körper kann man das Schrägbild und die verschiedenen Risse zeichnen.


Dezimeterwürfel mit eingelegter Fläche


Schrägbild des Dezimeterwürfels

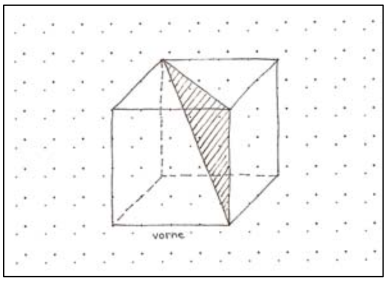
1 Formen ins Würfelmodell stellen und Schrägbilder zeichnen

Baue das links abgebildete Modell.

A Beschreibe, wie die Dreieckform im Würfel liegt. Verwende Fachbegriffe wie: Ecke, Kante, Seitenfläche, Grundfläche, Deckfläche, Diagonale, parallel zu, senkrecht zu …

B Betrachte das Modell von vorne, von links, von rechts und von hinten. Zeichne die Schrägbilder auf Punktpapier.

C Stelle eine andere Form in den Würfel und wiederhole Aufgabe 1B.



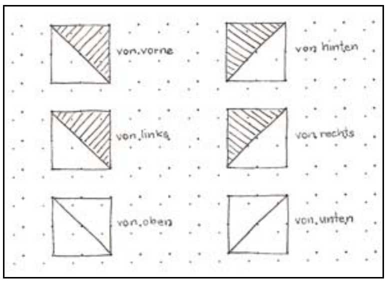
Vorderseite des Kärtchens mit dem Schrägbild

2 Zum Schrägbild die Risse zeichnen

A Links siehst du eine Kärtchenaufgabe. Auf der Vorderseite ist das Schrägbild eines Modells gezeichnet, auf der Rückseite sind die entsprechenden Risse dargestellt. Überprüfe die Kärtchenaufgabe.

B Stelle eine andere Form in den Würfel und zeichne die entsprechende Kärtchenaufgabe.

C Gebt einander die Kärtchen zum Überprüfen.

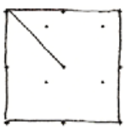


Rückseite des Kärtchens mit den sechs Rissen

3 Mit Kärtchenaufgaben arbeiten

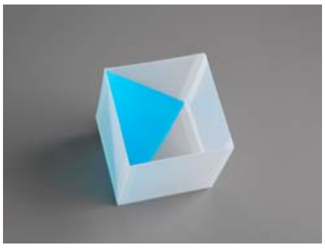
A Nimm ein Kärtchen einer Mitschülerin, eines Mitschülers und zeichne zum Schrägbild die sechs Risse.

B Nimm ein weiteres Kärtchen und zeichne zu den sechs Rissen das Schrägbild.


Grundriss zu Aufgabe 4

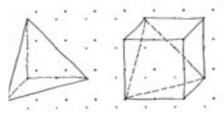
4 Mögliche Modelle zu einem Riss

Links siehst du einen Grundriss. Skizziere Schrägbilder, die zu diesem Riss passen.



Modell mit eingelegter Fläche

Zu Aufgabe 4A
Schrägbild von vorne



Zu Aufgabe 4C
Schrägbilder der Teilkörper

5 Schrägbilder zeichnen

A Stelle das grosse gleichseitige Dreieck in den Würfel. Zeichne die Schrägbilder des abgebildeten Modells von vorne, von links, von rechts und von hinten. Drehe dazu das Modell in die entsprechende Position.

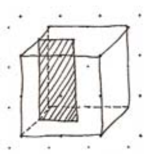
B Die dreieckige Fläche unterteilt den Würfel in zwei Teilkörper. Beschreibe die beiden Teilkörper.

C Zeichne verschiedene Schrägbilder der beiden Teilkörper auf Punktpapier.

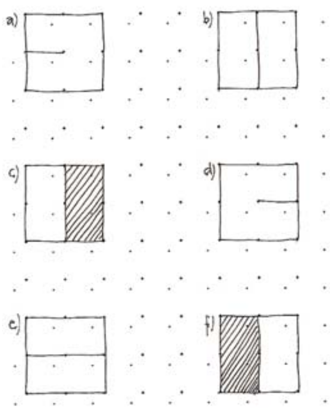
---

6 Teilkörper finden und Schrägbilder zeichnen

Suche weitere Formen, die den Würfel in zwei Teilkörper unterteilen. Verfahre wie in Aufgabe 5C.



Schrägbild von vorne



Risse des Körpers

7 Risse den Seitenansichten zuordnen

A Untersuche beim links gezeichneten Schrägbild, welcher Riss zu welcher Ansicht gehört. Von welcher Seite wurde das Modell jeweils gezeichnet?

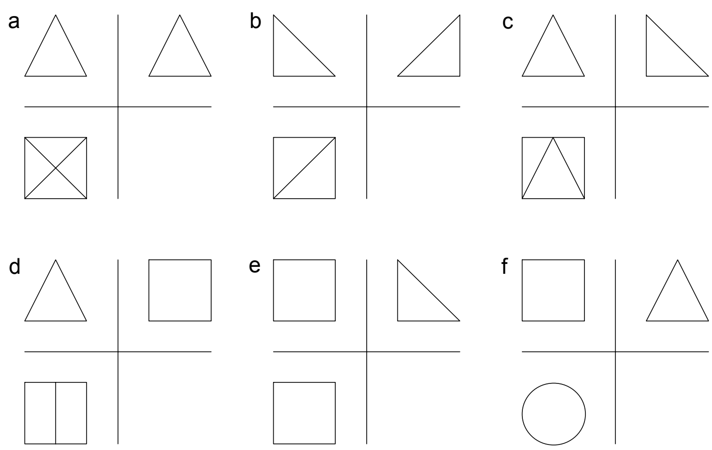
B Gibt es Risse, die nicht zu diesem Schrägbild passen? Begründe.

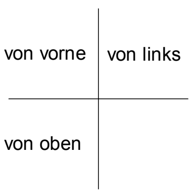
C Entwirf eigene solche Aufgaben und gib sie deinen Mitschülerinnen und Mitschülern zum Lösen.

---

8 Schrägbilder finden

Unten sind sechs Körper in den drei Rissen dargestellt. Links unten siehst du die Anordnung der drei Risse. Skizziere die Schrägbilder.





Anordnung der drei Risse zu Aufgabe 8

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum CH-Zahlenbuch/mathbu.ch		
V	Sich ebene und räumliche Figuren vorstellen	– Wahre Gestalt von Teilen eines Schrägbildes erkennen und beschreiben	Zahlenbuch 6	S. 74	Quader
V	Sich in der Ebene und im Raum orientieren	– Schrägbilder und Risse von einfachen Körpern zeichnen	mathbu.ch 7	LU 13	Kopfgeometrie
K	Geometrische Begriffe kennen	– Das Raumvorstellungsvermögen trainieren und verbessern	mathbu.ch 8	LU 17	Schattenbilder/ Schrägbilder
		– Geometrische Begriffe anwenden	mathbu.ch 9		

Zur Sache

Anhand eines Dezimeterwürfels, in den verschiedene Formen gestellt werden, können Schrägbilder und Risse gezeichnet werden. Die Grundlage dieser Abbildungen bildet die Parallelprojektion.

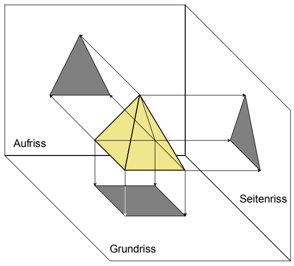
Voraussetzungen

Schrägbilder und Risse von einfachen Körpern. Begriffe wie Ecke, Kante, Grundfläche, Seitenfläche, Deckfläche, Parallele, Senkrechte, Körperdiagonale.

Zum Unterricht

Die Lernumgebung «Flächen im Würfel» geht vom Bezug der vorliegenden Formteile zum Dezimeterwürfel aus. In einem ersten Teil geht es um die korrekte Beschreibung der Lage der Flächen im Würfel und um die korrekte Anwendung geometrischer Begriffe. Es folgt die perspektivische Darstellung des Körpers in der Ebene, das so genannte Schrägbild. In einem dritten Teil folgen die verschiedenen Risse wie Grund-, Auf- und Seitenriss. Besonders reizvoll ist die Darstellung ein und desselben Körpers aus unterschiedlichen Blickwinkeln: Wie sehen die unterschiedlichen Schrägbilder und Risse aus? Wichtig in dieser Lernumgebung ist die exemplarische Vorgehensweise. Die Aufgabenstellungen eignen sich dank ihrer natürlichen Differenzierung für einen binnendifferenzierten Unterricht.

1 Neben der korrekten Verwendung mathematischer Begriffe geht es ums Vorstellungsvermögen und um Grundfertigkeiten beim Zeichnen von Schrägbildern. Hier genügen Freihandskizzen. Die Verwendung von Lineal und Geodreieck schränkt die Kreativität möglicherweise unnötig ein.



Erzeugung der Schattenrisse

2 Zur Visualisierung der verschiedenen Risse eignet sich ein aus drei senkrecht zueinander stehenden Flächen gebildetes Modell. Mit einer beweglichen Lichtquelle können Schattenbilder beliebiger Objekte erzeugt werden (vgl. mathbu.ch 8, LU 17).

3 Mit den Kärtchen aus Aufgabe 2 kann das Vorstellungsvermögen gefördert werden. Die Aufgabe 3B ist sehr anspruchsvoll. Als Hilfsmittel können Modelle hergestellt werden.

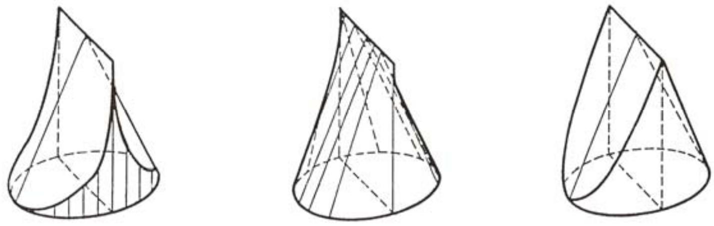
4 Die Reduktion auf einen einzigen Riss lässt mehrere Lösungen zu. Denkbar sind auch Lösungen mit Formen, die nicht im Set enthalten sind.

5 6 Beim Zeichnen von Schrägbildern der Teilkörper rückt die Würfeldarstellung in den Hintergrund. Die Darstellung wird dadurch anspruchsvoller.

7 Bei dieser Aufgabe geht es um das Zuordnen der Risse zu den verschiedenen Ansichtsmöglichkeiten des Modells.

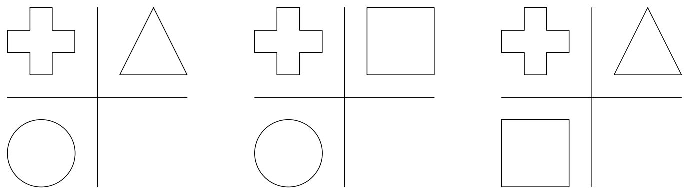
Didaktischer Kommentar

8 Die Aufgaben sind weitgehend vom Modell losgelöst. Die meisten Risse lassen mehrere Lösungen zu. Körper f zum Beispiel stellt den Polya-Stöpsel dar, einen in eine Kante auslaufenden Zylinder. Mit einem Korkzapfen lässt sich einfach ein Modell herstellen.



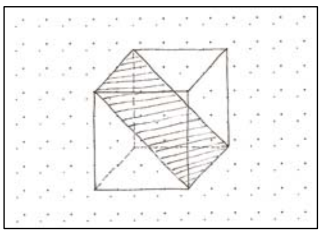
Weiterführendes

Aufgabe 8 lässt viele spielerische Erweiterungen zu. So können beliebige Risse gezeichnet werden, zu denen nachträglich ein möglicher Körper gesucht wird. Solche Beispiele können folgendermassen aussehen:

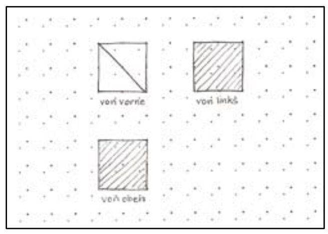


Die Reduktion auf den Grundriss, den Aufriss und den Seitenriss zur Darstellung eines Gegenstandes spielt in vielen technischen Berufen eine wichtige Rolle. Dazu kann folgende Aufgabe gestellt werden:

A Stelle Kärtchen nach dem folgenden Muster her:



Vorderseite des Kärtchens mit dem Schrägbild



Rückseite des Kärtchens mit den drei Rissen

B Gebt einander die Kärtchen zum Überprüfen.

C Nimm ein Kärtchen mit dem Schrägbild und zeichne die drei Risse.

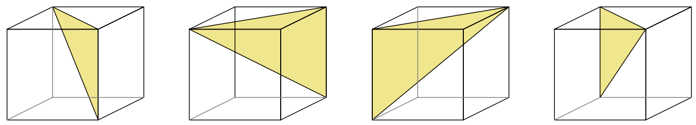
D Nimm ein neues Kärtchen mit den drei Rissen und zeichne dazu das Schrägbild.

Ausgehend von zwei Rissen können mögliche Schrägbilder entworfen und diskutiert werden.
Anhand der Modelle können zahlreiche Berechnungen durchgeführt werden. So können einzelne Strecken, Winkel, Flächen und Volumen berechnet werden.
Ausgehend von Aufgabe 5C können die Abwicklungen der beiden Teilkörper konstruiert werden. Durch Ausschneiden und Falten lässt sich die Korrektheit der Lösung überprüfen.
Weiter kann die Anzahl möglicher Netze eines Körpers thematisiert werden.

Lösungen

1 A Für den abgebildeten Körper lautet eine mögliche Beschreibung folgendermassen: Die dreieckige Fläche liegt auf der diagonalen Schnittfläche des Würfels und sie ist halb so gross wie diese. Eine Seite ist so lang wie die Würfelkante, eine ist so lang wie die Körperdiagonale, eine ist so lang wie die Diagonale der Deckfläche. Zusammen bilden sie ein rechtwinkliges Dreieck. Die dreieckige Fläche wird von drei Würfelecken aufgespannt.

B



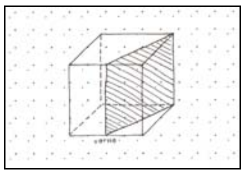
von vorne | von links | von rechts | von hinten

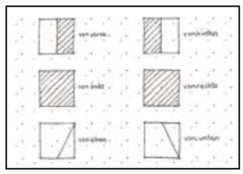
C Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

---

2 A Alle sechs Risse sind korrekt.

B Mögliches Beispiel:



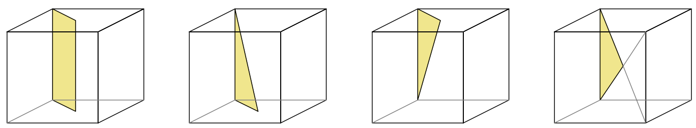


C Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

---

3 A, B Kontrolle anhand der Kärtchen.

4

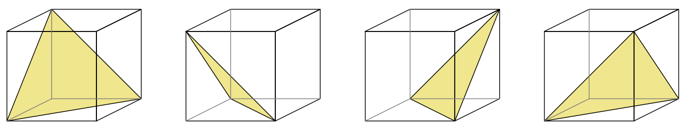


Form 3 | Form 10 | Form 10 | Form 9

Abgesehen von den Formen aus dem Set sind auch andere Formen möglich, um den abgebildeten Riss zu erzeugen.

---

5 A

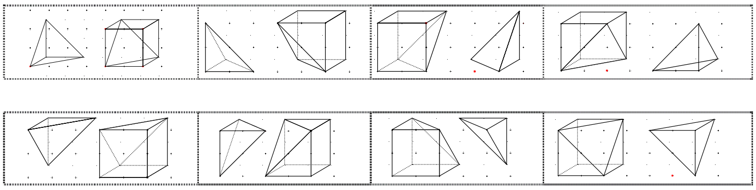


von vorne | von links | von rechts | von hinten

B Der kleinere Teilkörper ist eine Pyramide mit gleichseitigem Dreieck als Grundfläche. Die Mantelfläche bilden drei rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke.
Der grosse Teilkörper ist ein Würfel mit abgeschnittener Ecke. Seine Begrenzungsflächen bilden drei Quadrate, drei rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke und ein gleichseitiges Dreieck.

Lösungen

C



Es sind auch andere Ansichten möglich.

---

6 Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

---

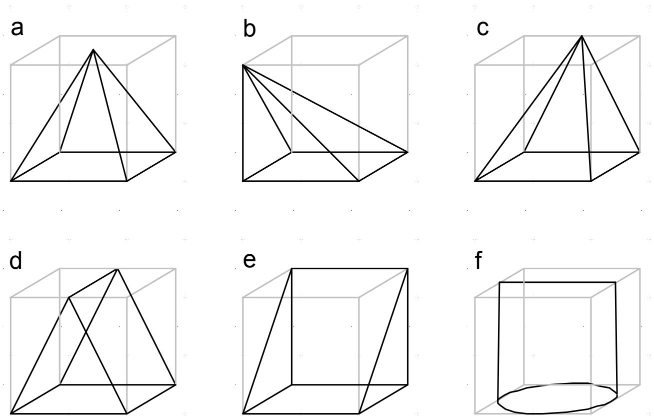
7 **A**

a) Von oben oder von unten b) Von links oder von rechts
c) Von hinten f) Von vorne

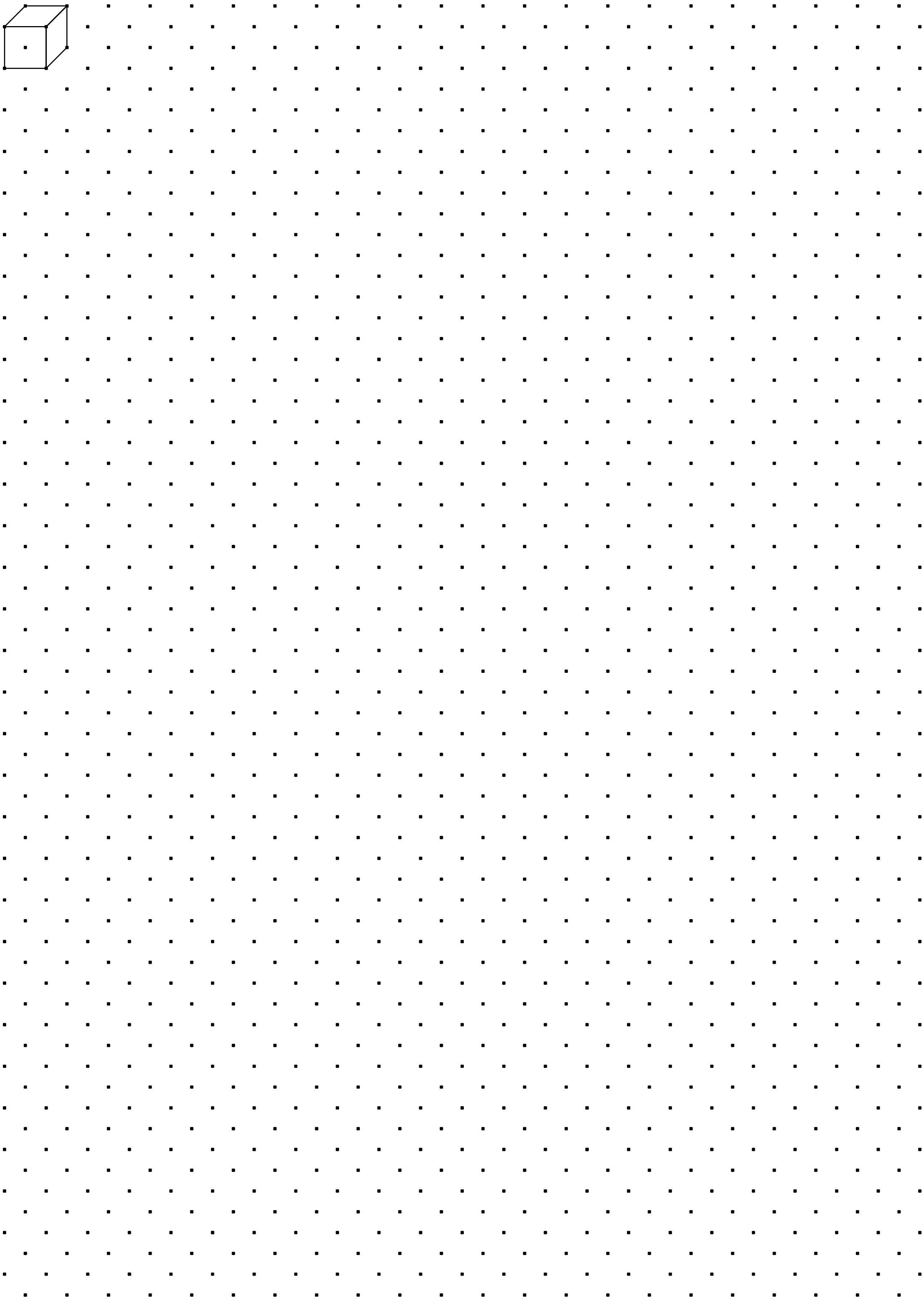
B d) und e) passen nicht, denn hier müsste der Würfel zuerst gedreht werden.

C Individuelle Lösungen. Gegenseitige Kontrolle.

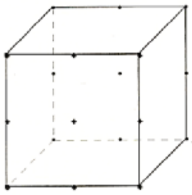
8



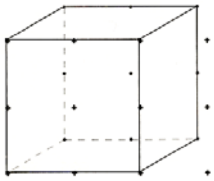
Punktpapier 45°, diagonaler Verkürzungsfaktor 0.7



Punktpapier 45°, diagonaler Verkürzungsfaktor 0.5



Punktpapier 30 °, diagonaler Verkürzungsfaktor 0.5



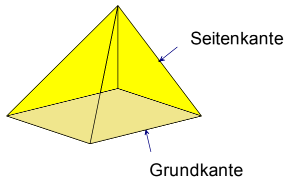
Hexagonalpapier klein

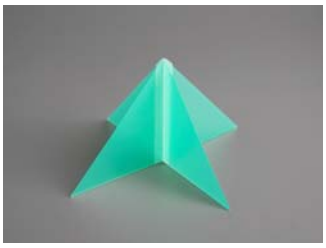
Hexagonalpapier gross

Lernumgebung «Pyramiden bauen»

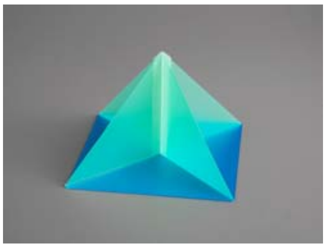
Material
Alle Formen
Farbiges Papier

Beim Quader kann die Höhe direkt aus dem Netz heraus bestimmt werden.
Bei der Pyramide ist es etwas komplizierter.

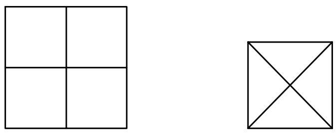




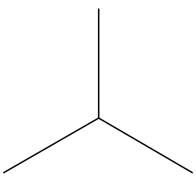
Pyramidengerüst



Pyramidengerüst auf die Grundfläche gestellt



Ansicht von oben zu Aufgabe 1



Pyramidengerüst einer Dreieckpyramide

1 Mantel und Grundfläche zum Pyramidengerüst

Links siehst du ein Pyramidengerüst. Ergänzt man es mit Mantel und Grundfläche, entsteht eine Pyramide.
Du siehst links zwei verschiedene Möglichkeiten, das Gerüst auf die Grundfläche zu stellen. So entstehen zwei unterschiedliche Pyramiden.

- **A** Baue die beiden Situationen mit der Form 6 nach.
- **B** Stelle für beide Pyramiden den Mantel aus Papier her. Überprüfe am Gerüst.
- **C** Lege für beide Pyramiden die Grundfläche mit den entsprechenden Formen.
- **D** Zeichne die beiden Pyramiden im Schrägbild und gib die Längen der Grundkante, der Seitenkante und der Höhe der Pyramide an.

---

2 Pyramide vergleichen

- **A** Vergleiche die Höhe, die Grundfläche, die Mantelfläche und das Volumen der beiden Pyramiden. Beschreibe und begründe.
- **B** Berechne die Mantelfläche und das Volumen der beiden Pyramiden.

---

3 Pyramidengerüst vergleichen

Nimm die Form 10 und baue ein Pyramidengerüst wie in Aufgabe 1.

- **A** Baue ein solches Gerüst. Skizziere die entsprechenden Grundflächen.
- **B** Gib von beiden Pyramiden die Grösse der Mantelfläche und des Volumens an.
- **C** Vergleiche die Ergebnisse mit den Ergebnissen von Aufgabe 2. Beschreibe und begründe.

---

4 Dreieckpyramiden

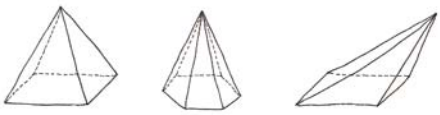
Du kannst auf die gleiche Weise mit drei Dreieckformen 6 ein Pyramidengerüst für Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche bauen. Einmal ist die Hypotenuse die Pyramidenkante, das andere Mal ist sie die Höhe des Manteldreiecks.
Stelle ein entsprechendes Pyramidengerüst her und gehe wie in Aufgabe 1A–D vor.

5 Pyramidenmantel bauen

- **A** Stelle mit Flächenformen des Sets einen Pyramidenmantel her.
- **B** Zeichne die entsprechende Grundfläche massstabgetreu.
- **C** Bestimme die Höhe der Pyramide. Schreibe auf, wie du vorgehst.
- **D** Bestimme das Volumen der Pyramide.
- **E** Stelle einen weiteren Mantel her.
- **F** Tauscht die Mantelflächen aus und löst dazu die Aufgaben B−D.
- **G** Kontrolliert gegenseitig die Ergebnisse.

---

6 Verschiedene Pyramiden untersuchen

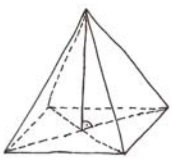

Verschiedene Pyramidenformen

Für welche Pyramiden stimmen die folgenden Aussagen, für welche nicht? Mach zu jeder Aussage eine Skizze. Begründe deine Antworten.

- **A** Die Länge der Seitenkante einer Pyramide ist immer länger als die Grundkante der Pyramide.
- **B** Die Länge der Seitenkante ist immer länger als die Höhe des Manteldreiecks.
- **C** Die Länge der Seitenkante ist immer länger als die Höhe der Pyramide.
- **D** Die Grundkante der Pyramide ist immer länger als die Pyramidenhöhe.

---

7 Gegeben, gesucht


Gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche

Zeichne 3-mal das abgebildete Schrägbild links. Markiere darin jeweils das Gegebene grün und das Gesuchte rot. Beantworte und begründe, ob sich das Gesuchte berechnen lässt.

- **A** Gegeben: Grundkante, Höhe der Pyramide
  Gesucht: Seitenkante
- **B** Gegeben: Höhe des Manteldreiecks
  Gesucht: Seitenkante
- **C** Gegeben: Höhe der Pyramide, Höhe des Manteldreiecks
  Gesucht: Grundkante
- **D** Zeichne einen anderen Pyramidentyp und löse die Aufgaben 7A−C. Tauscht die Ergebnisse aus und diskutiert sie.
- **E** Sucht Pyramidenformen, bei denen nicht alle Aufgaben 7A−C lösbar sind. Beschreibt und begründet.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum mathbu.ch		
V	Sich ebene und räumliche Figuren vorstellen	– Die Struktur der Pyramide untersuchen	mathbu.ch 9 mathbu.ch 9+	LU 6 LU 6	Prisma und Pyramide
V	Sich Zusammenhänge und Veränderungen vorstellen	– Zusammenhang zwischen Pyramidenhöhe, Höhe des Manteldreiecks und der Länge der Seitenkante der Pyramide erarbeiten	mathbu.ch 9 mathbu.ch 9+	LU 17 LU 19	Körperschule Körperschule
M	Muster und Gesetzmässigkeiten erkennen				
P	Reflektieren und überprüfen				

Zur Sache

Anhand des Pyramidengerüstes werden die Unterschiede und Zusammenhänge zwischen Pyramidenhöhe, Mantelhöhe und Seitenkantenlänge erarbeitet. Mantelflächen setzen sich aus Dreieckflächen zusammen. Die Grundfläche ist ein reguläres Vieleck, wenn der Mantel aus gleichen Dreieckflächen besteht. Die grösste mögliche Grundfläche wird durch die Winkel der Manteldreiecke bestimmt.

Voraussetzungen

Volumenberechnung der Pyramide, Satz des Pythagoras.

Zum Unterricht

Das Pyramidengerüst verbildlicht die Höhe des Manteldreiecks und die Seitenkante der Pyramide. Diese beiden Grössen führen bei Pyramidenberechnungen oft zu Schwierigkeiten. Aus diesem Grund werden sie hier bewusst einander gegenübergestellt.
Der Aspekt des Pyramidennetzes wird in Aufgabe 5 aufgenommen. Experimentell fügen die Schülerinnen und Schüler Dreieckflächen aneinander. Mit den Flächenformen werden Mantelflächen gebaut. Die entsprechende Grundfläche wird skizziert, gezeichnet oder konstruiert.

1 - 3 Die Schülerinnen und Schüler bauen ein Pyramidengerüst, an dem sie die berechneten Mantelflächen überprüfen können. Dabei sind Überlegungen zu Grundfläche, Höhe Manteldreieck, Länge der Seitenkante wichtig.

4 Diese Aufgabe ist anspruchsvoll. Das Bestimmen des Mittelpunktes eines gleichseitigen Dreiecks muss bekannt sein. Natürlich kann diese Aufgabe auch experimentell angegangen werden. In diesem Fall müssen die Schülerinnen und Schüler die Grundfläche zeichnen und in der Zeichnung Grössen messen.

5 Die Schülerinnen und Schüler experimentieren mit den Flächenformen und erarbeiten so Eigenschaften der Pyramide. Sie werden feststellen, dass nicht beliebig viele Dreiecke zu einem Pyramidenmantel zusammengefügt werden können. Eine besondere Herausforderung ist, die entsprechende Grundfläche zu finden. Wird zur Mantelbildung nur eine Form verwendet, entsteht als Grundfläche ein reguläres Vieleck. An dieser Stelle könnte die Konstruktion von Vielecken thematisiert werden.
Mit dem vorgegebenen Flächenset gibt es nur zwei Möglichkeiten, einen Pyramidenmantel mit unterschiedlichen Formen zu bilden. Als Grundfläche entsteht entweder ein Quadrat oder ein Rechteck.

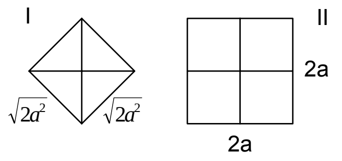
6 - 7 Die Schülerinnen und Schüler repetieren rückblickend wichtige Pyramideneigenschaften.

Weiterführendes

Pyramidengerüste können mit unterschiedlichen rechtwinkligen Dreiecken (drei verschiedene Formen) gebaut werden; entsprechend wird die Grundfläche verändert.
Kegel und Pyramide sind verwandte Körper. Viele dieser Aufgabenstellungen lassen sich auch auf den Kegel übertragen. Als Handlungsmaterial könnte festes Papier dienen.

Lösungen

2



A

Pyramidentyp:	I	II
Grundkante:	ca. 14.1 cm	20 cm
Seitenkante:	ca. 14.1 cm	ca. 17.3 cm
Höhe:	10 cm	10 cm

B

Mantelfläche:	ca. 566 cm^2	ca. 346 cm^2
Volumen:	ca. 1333 cm^3	ca. 667 cm^3

Erweiterte Ansprüche: Formale Berechnung für den Fall, dass die Höhe der Pyramide auch a ist.

$$h_I = h_{II} = a = 10cm$$

$$V_I = \frac{2a^2 \cdot a}{3} \approx 667cm^3 \qquad V_{II} = \frac{4a^2 \cdot a}{3} \approx 1333cm^3 \qquad 2 \cdot V_I = V_{II}$$

$$M_I = 4\frac{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot a^2 \approx 346cm^2$$

$$M_{II} = 4\frac{2a \cdot \sqrt{a^2 + a^2}}{2} = 4\sqrt{2} \cdot a^2 \approx 566cm^2$$

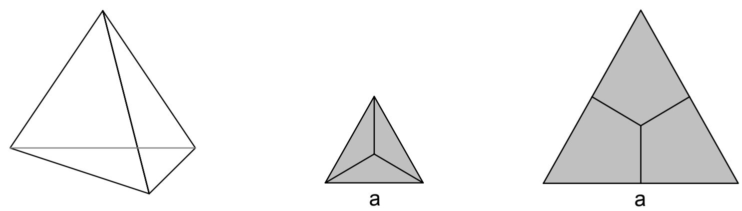
---

3 **B** Zur Durchdringung des Sachverhaltes werden nun die gleichen Überlegungen mit a = 5 cm gemacht. Die Höhe der Pyramide ist unverändert 10 cm (Form 10).

Pyramidentyp:	I	II
Höhe:	10 cm	10 cm
Grundfläche:	50 cm^2	100 cm^2
Volumen:	ca. 167 cm^3	ca. 333 cm^3
Mantel:	ca. 122 cm^2	ca. 224 cm^2

Individuelle Berichte: Pyramidengrundfläche entspricht ¼ der Pyramidengrundfläche von Aufgabe 2. Entsprechend verändern sich die anderen Masse mit Ausnahme des Mantels.

4



a = 17.3 cm 2a = 34.6 cm

Individuelle Lösungen. Vgl. mit dem Modell der Lernenden.

Lösungen

5 Individuelle Lösungen.

---

6 **A** Muss nicht sein: Grosse Grundfläche, kleine Höhe ist möglich.

B Ja. Seitenkante und Höhe sind beim rechtwinkligen Dreieck gleich gross.

C Muss nicht sein: Die Seitenkante ist nur länger, wenn die Spitze über der Grundfläche liegt.

D Muss nicht sein: Grosse Grundfläche, kleine Höhe ist möglich.

---

7 **A** Ja, indem man den Pythagoras zweimal nacheinander anwendet: Zuerst wird die Höhe des Manteldreiecks mit der halben Grundkantenlänge und der Höhe der Pyramide bestimmt. Anschliessend kann die Seitenkante durch die Höhe des Manteldreiecks und der halben Grundkantenlänge berechnet werden.

B Nein, es müsste noch eine weitere Länge bekannt sein.

C Ja, mit Pythagoras: Die Höhe des Manteldreiecks ist die Hypotenuse und die Höhe der Pyramide eine Kathete. Die halbe Grundkante ist die zweite Kathete im rechtwinkligen Dreieck.

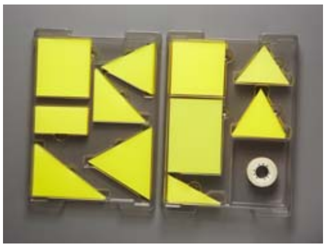
D Individuelle Lösungen.

E Zum Beispiel nicht gerade quadratische Pyramiden.

Lernumgebung «Ähnlichkeit»

Material
Alle Formen

Mit Hilfe der Formen lassen sich zueinander ähnliche Flächen legen; die Eigenschaften der Ähnlichkeit werden so gezeigt.

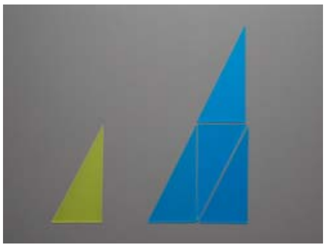

Ähnliche Formen finden

1 Ähnliche Formen finden

A Suche Formen, die ähnlich zu einem A4-Blatt sind. Begründe und skizziere.

B Vergleiche die Seitenlängen und die Fläche der ähnlichen Form mit jenen des A4-Blatts.

C Welche der Formen sind ähnlich zueinander?


Grössere Flächen legen

2 Ähnliche Flächen legen

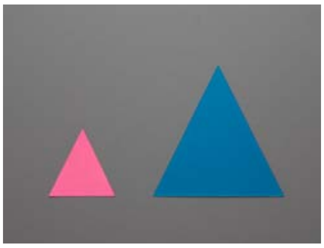
A Wähle eine beliebige Form aus. Deine Partnerin, dein Partner legt eine grössere Fläche, die zur gewählten Form ähnlich ist.

B Tauscht die Rollen.

C Wie viel mal so gross werden die Seitenlängen der zusammengesetzten Fläche?

D Wie viel mal so gross wird die zusammengesetzte Fläche?

E Könnt ihr zu allen Formen eine ähnliche Fläche legen? Begründet eure Antworten.

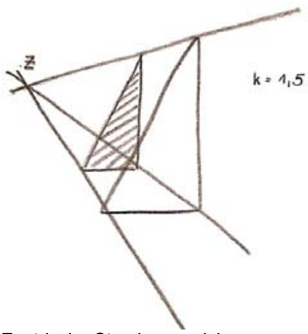

Kleinere ähnliche Flächen herstellen

3 Ähnliche Flächen herstellen

A Wähle eine beliebige Form aus. Deine Partnerin, dein Partner stellt eine kleinere Fläche aus Papier her, die zur gewählten Form ähnlich ist.

B Tauscht die Rollen.

C Vergleicht und diskutiert eure Vorgehensweisen.



Zentrische Streckung zeichnen

4 Ähnliche Figuren zeichnen

A Du wählst eine Form aus und gibst den Streckungsfaktor vor. Deine Partnerin, dein Partner streckt die Form von einem selbst gewählten Streckungszentrum aus.

B Tauscht die Rollen.

C Skizziert die Situationen mit dem Streckungszentrum.

5 Ähnliche Formen finden

A Lege die ähnlichen Formen von Aufgabe 1C so, dass du die zentrische Streckung erklären kannst. Skizziere und beschreibe.

B Vergleiche die Seitenlängen und die Flächeninhalte und bestimme den Streckungsfaktor.

---

6 Gib einen Tipp

Woran erkennt man ähnliche Figuren?
Skizziere und beschreibe.

---

7 Gib einen Tipp

Erkläre, wie man eine Figur vergrössern bzw. verkleinern kann.
Skizziere und beschreibe.

---

8 Wahr oder falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe deine Antworten.

A Zwei Figuren sind ähnlich zueinander, wenn alle Winkel gleich sind.

B Alle Quadrate sind untereinander ähnlich.

C Alle Rechtecke sind untereinander ähnlich.

D Alle Kreise sind untereinander ähnlich.

E Wenn ich eine Figur mit dem Faktor k strecke, wird die Fläche der Bildfigur k-mal grösser.

F Wenn eine Figur mit einem Faktor zwischen 0 und 1 gestreckt wird, wird sie kleiner.

G Wenn eine Figur mit einem Faktor kleiner als 0 gestreckt wird, wird sie kleiner.

---

9 Weitere Aussagen

Formuliere weitere Aussagen und lasse sie von deiner Lernpartnerin, deinem Lernpartner überprüfen.

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum mathbu.ch		
V	Geometrisches Vorstellungsvermögen schulen	– Ähnliche Figuren erkennen – Die zentrische Streckung als Ähnlichkeitsabbildung erkennen	mathbu.ch 9/9+	LU 5	Form
K	Eigenschaften der Ähnlichkeit kennen				
M	Zentrische Streckung anwenden				
P	Situationen nachvollziehen				

Zur Sache

Es werden ähnliche Figuren gesucht, gelegt und skizziert; Streckungsfaktoren und Streckungszentren werden bestimmt.

Voraussetzungen

Eigenschaften ähnlicher Figuren und der zentrischen Streckung.

Zum Unterricht

Die Lernumgebung «Ähnlichkeit» ist an die Lernumgebung 5 im mathbu.ch 9 angelegt. Die Kongruenz wird bereits im mathbu.ch 7 thematisiert.
Die bereits erarbeiteten Eigenschaften der Ähnlichkeit bzw. der zentrischen Streckung werden an konkreten Objekten veranschaulicht.

1 Der Begriff «ähnlich» wird abgerufen und wiederholt.

2 Von den Formen ausgehend werden partnerweise ähnliche grössere Figuren gelegt. Es empfiehlt sich, die gelegten Flächen zu fotografieren und die Fotos auszudrucken, weil sie gross werden.

3 Von den Formen ausgehend werden partnerweise ähnliche kleinere Figuren hergestellt.

4 Der Begriff «zentrische Streckung» wird abgerufen und erklärt. Partnerweise werden mit Hilfe der zentrischen Streckung ähnliche Figuren gezeichnet.

5 Der Streckungsfaktor bei einer schwierigeren Streckung wird bestimmt.

6 7 Die Lernenden finden eigene Formulierungen.

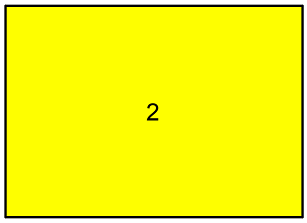
8 Aussagen überprüfen: Die Schülerinnen und Schüler werden im Bereich «Erklären und Begründen» gefördert.

Weiterführendes

Jede Figur mit gegebenen (auch negativen) Streckungsfaktoren strecken.
Streckung im Raum: mit den Formen Würfel bauen und mit 2-cm-Würfel füllen: Streckungsfaktor?

Lösungen

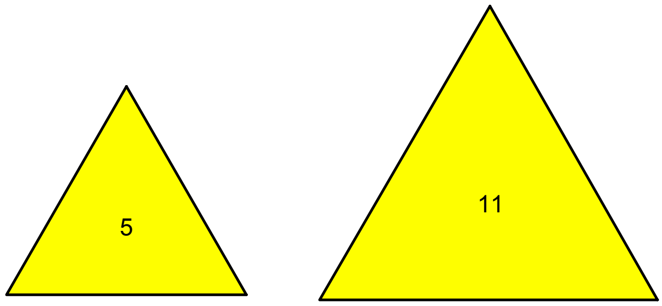
1 A, B



Länge = Breite · $\sqrt{2}$
Form: 10 cm · 14.14 cm = 141.4 cm^2
A4-Blatt: 21 cm · 29.7 cm = 623.7 cm^2

Streckungsfaktor ≈ 2.1

C



Die beiden gleichseitigen Dreiecke sind ähnlich zueinander.

---

2 Individuelle Lösungen.

---

3 Individuelle Lösungen.

---

4 Individuelle Lösungen.

---

5 A Individuelle Lösungen.

B s_5 = 10 cm, s_{11} ≈ 14.1 cm
A_5 ≈ 43.3 cm^2 und A_{11} ≈ 86.6 cm^2, Streckungsfaktor $\sqrt{2}$ ≈ 1.4

---

6 Individuelle Lösungen.

---

7 Individuelle Lösungen.

---

8 Die Aussagen A, C, E und G sind falsch.

---

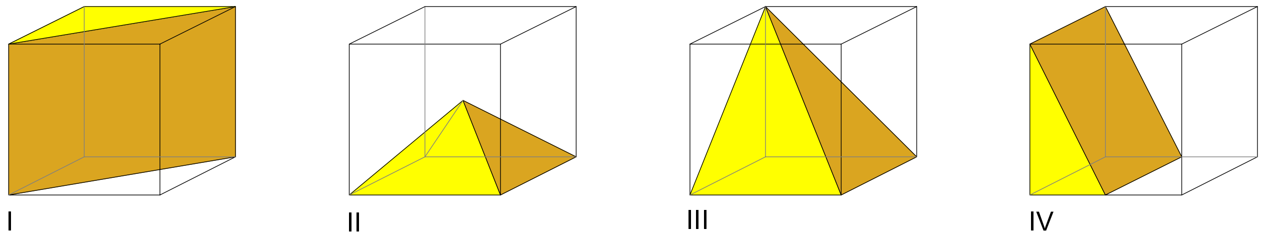
9 Individuelle Lösungen.

Mit Flächen bauen – mit Flächen lernen

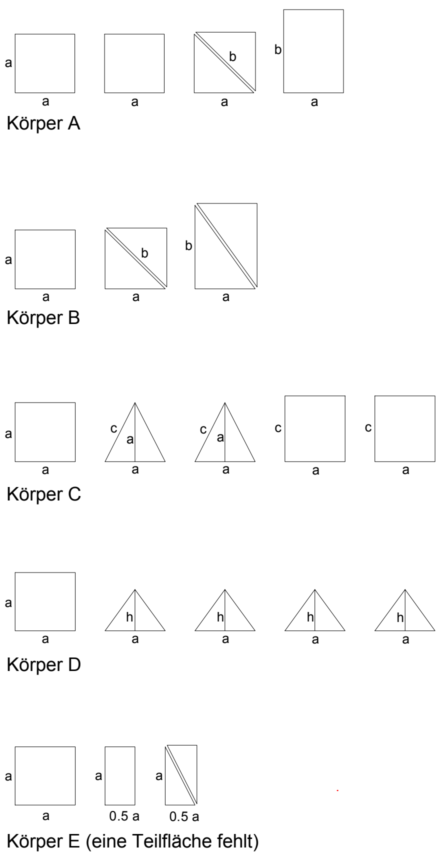
Lernumgebung «Prisma und Pyramide»

Material
Alle Formen
Klebstreifen

Pyramide und Prisma unterscheiden sich im Aussehen manchmal kaum. Die Berechnung des Volumens ist jedoch unterschiedlich. Hier werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede untersucht.



Schrägbilder von Prismen und Pyramiden im Würfel



Flächen zum Bauen von Prismen und Pyramiden

1 Sich Körper vorstellen

Mit den gezeichneten Formen links lassen sich Körper bauen.

A Welche der Körper A–E sind Prismen? Welche sind Pyramiden?
B Ordne Körper A–E den Schrägbildern oben zu.
C Begründe deine Zuordnung.
D Skizziere die fehlende Form von Körper E.
E Skizziere das fehlende Schrägbild.

2 Körper bauen

A Baut die Körper nach.
B Überprüft eure Ergebnisse aus Aufgabe 1.

3 Körper zusammenfügen

A In der Klasse sind bei Aufgabe 2 viele Körper entstanden. Setzt damit Würfel zusammen.
B Skizziert das Schrägbild dieser Würfel mit den Teilkörpern.
C Sucht viele Möglichkeiten, tauscht eure Ergebnisse aus.

4 Körper berechnen

A Berechne die Volumen der gebauten Körper.
B Berechne die Oberflächen der gebauten Körper.

5 Gib einen Tipp

Wie unterscheidet sich das Prisma von der Pyramide, im Aussehen, in der Berechnung des Volumens, in der Berechnung der Oberfläche?

Didaktischer Kommentar

Richtziele		Inhaltliche Ziele	Bezug zum mathbu.ch		
V	Sich ebene und räumliche Figuren vorstellen	– Form und Begriffe der Pyramide erarbeiten	mathbu.ch 9	LU 6	Pyramide und Prisma
V	Zeichnen, skizzieren, konstruieren	– Prismenberechnung repetieren		LU 17	Körperschule
M	Muster und Gesetzmässigkeiten erkennen	– Pyramidenberechnung repetieren	mathbu.ch 9+	LU 6	Pyramide
K	Reflektieren und überprüfen			LU 19	Körperschule

Zur Sache

Pyramiden werden bewusst im Zusammenhang mit Prismen thematisiert. So können besondere Eigenschaften nachhaltig im Vergleich zu Prismen diskutiert und erarbeitet werden.
Die Körper sind Teilkörper des Würfels. Sie lassen sich zu einem Würfel zusammenfügen. Auf diese Weise kann auf das Volumen der Körper geschlossen werden. Zum Beispiel: Die kleine Pyramide ist 1/6 des Würfels. Sechs solche Pyramiden lassen sich zu einem Würfel zusammenfügen.

Voraussetzungen

Volumenberechnung Prisma und Pyramide, Satz des Pythagoras.

Zum Unterricht

Der Wechsel vom Raum zur Fläche und wieder zurück fordert und fördert das Vorstellungsvermögen zu Raum und Ebene. Die Lernenden werden angeleitet, Schrägbilder und Flächen zu vergleichen.

1. In einer ersten Auseinandersetzung müssen die Schülerinnen und Schüler gedanklich die vorgegebenen Flächen mit den Schrägbildern vergleichen und entscheiden, was zusammenpasst.
   In dieser Aufgabe steckt auch die Umkehrüberlegung drin. Ein Schrägbild fehlt, das muss selber entworfen werden. Eine Fläche fehlt. Sie muss ergänzt werden.

2. Dieser Arbeitsschritt ist wichtig. Es gibt Schülerinnen und Schüler; denen es leicht fällt, die Schrägbilder zu interpretieren und die Pläne zu lesen. Dennoch ergeben sich Unsicherheiten beim Zusammenfügen der Teile.

3. Die gebauten Körper können alle zu Würfeln zusammengefügt werden. Hier sind ein Austausch und eine Zusammenarbeit in Gruppen nötig. Nur so können zum Beispiel sechs kleine Pyramiden zu einem Würfel zusammengebaut werden.
   Ausgehend von den Würfelzusammensetzungen kann auf die Volumenberechnung geschlossen werden.

4. Die Volumenberechnung kann in Aufgabe 3 diskutiert werden.
   Zur Berechnung der Oberfläche wird der Satz des Pythagoras gebraucht.

5. Prisma und Pyramiden werden einander nochmals gegenübergestellt.

Weiterführendes

Mit den Flächenformen können auch andere Teilkörper des Würfels gebaut werden, zum Beispiel:
Tetraeder im Würfel und seine Restkörper, Keplerstern im Würfel (siehe Beilage).

Lösungen

1 **A** Prisma: A, C, E — Pyramide: B, D

B Körper A: I — Körper D: II

Körper B: III — Körper E: IV

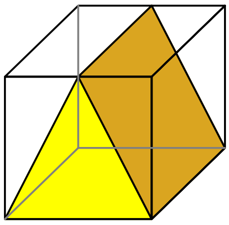
Körper C: kein passendes Schrägbild

C Individuelle Lösungen.

D

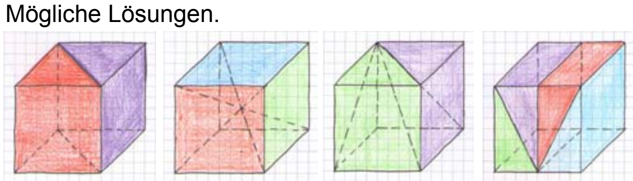
c = $\frac{a}{2}\sqrt{5}$

E



---

3 **B** Mögliche Lösungen.



---

4 **A** Körper A: 500 cm^3 — Körper D: ca. 167 cm^3

Körper B: ca. 333 cm^3 — Körper E: 250 cm^3

Körper C: 500 cm^3

B Körper A: ca. 441 cm^2 — Körper D: ca. 242 cm^2

Körper B: ca. 341 cm^2 — Körper E: ca. 341 cm^2

Körper C: ca. 482 cm^2

---

5 Individuelle Lösungen.

Zum Keplerstern

Diese Beilage bezieht sich auf das mathbu.ch 9 (LU17) bzw. 9+ (LU19). Die kleinen gleichseitigen Dreiecke sind nicht im Set enthalten.

Der Keplerstern entsteht als Durchdringung von zwei zueinander punktsymmetrischen Tetraedern.

Die Sternspitzen liegen in den Ecken eines Würfels.

Welchen Anteil am Würfelvolumen hat der Sternkörper?

Ein dem Würfel einbeschriebenes Tetraeder hat 1/3 des Würfelvolumens. Das lässt sich mit Pythagoras (recht aufwändig) berechnen oder – wie folgt – anschaulich herleiten.

Das Tetraeder füllt den Würfel zusammen mit vier Restkörpern.

Diese Restkörper sind dreiseitige Pyramiden. Eine Seitenfläche entspricht einer Tetraederfläche. Die anderen drei sind halbe Würfelflächen (rechtwinklig gleichschenklige Dreiecke).

Zwei Restkörper lassen sich zu einer schiefen Pyramide zusammensetzen, die in Grundfläche und Höhe dem Tetraeder entspricht, also volumengleich ist. Demnach füllen die Restkörper je 1/6 des Würfels, das Tetraeder 1/3.

Der Keplerstern lässt sich auch als Tetraeder mit aufgesetzten Spitzen beschreiben. Diese sind ebenfalls Tetraeder – mit halber Kantenlänge, also 1/8 des Volumens des grossen Tetraeders. Die vier Spitzen machen demnach zusammen 1/6 des Würfelvolumens aus.

Der Keplerstern umfasst ½ des Würfelvolumens.

Diese Aufgabe wurde von Werner Jundt entwickelt.